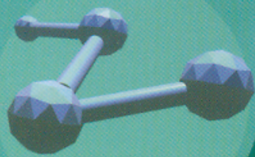


普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书



教育科学"十五"国家规划课题研究成果

最优控制理论简明教程

雍炯敏　楼红卫





高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是信息与计算科学专业系列教材之一,以较简短的篇幅介绍了常微分方程系统最优控制理论的三个里程碑工作——Pontryagin 最大值原理、Bellman 动态规划方法和 Kalman 线性二次最优控制理论;同时也讨论了线性系统的时间最优控制问题和最优控制的存在性理论。

本书可以作为信息与计算科学专业和数学与应用数学专业本科高年级和研究生的专业课或选修课的教学用书,对希望了解最优控制理论的工程技术人员和有关方向研究人员也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

最优控制理论简明教程/雍炯敏,楼红卫. —北京:高等教育出版社,2006.11

ISBN 7-04-019953-X

Ⅰ.最… Ⅱ.①雍…②楼… Ⅲ.最佳控制-数学理论-高等学校-教材 Ⅳ.O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 108667 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2006 年 11 月第 1 版
印　　张	12	印　　次	2006 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	210 000	定　　价	15.50 元

物料号　19953-00

最优控制理论简明教程

雍炯敏　　楼红卫

前　言

认识和改造自然是人类进化发展中两类最基本的活动. 从发现昼夜交替和四季更迭的规律, 到发现大地是个既有自转又有绕太阳公转的“大球”, 直至发现分子、原子、基本粒子...... 这些都是人类认识自然的结果. 另一方面, 为了改善生活环境, 人类也创造了许多自然界本不存在的东西: 衣服、房屋、家具、劳动工具、交通工具、通讯工具、电视、计算机...... 所有这些都是人们努力改善生活环境的结果. 而“多快好省”地实现这些目标更是人们期待的.

按照数学的观点, 广义地讲, 认识世界是数学建模问题, 改造世界是控制问题, 而“多快好省”地改造世界则是最优控制问题. 因此, 控制问题和最优控制问题几乎是无处不在的. 从狭义的观点讲, 在一个控制问题中, 有一个受控对象和一个 (或多个) 控制作用. 如果施以不同的控制作用值, 受控对象就会有不同的反应. 通过适当改变控制作用, 人们能够在一定程度上使受控对象朝所希望的方向变化. 例如, 要通过起重机将若干重物吊至某个平台就是一个典型的控制问题. 这里, 受控对象是起重机的吊臂, 而控制作用则是驾驶员通过操纵杆施加于吊臂的起吊力. 显然, 将所有重物运到给定平台的方式有许多种 (一件一件地吊, 两件两件地吊, 按什么样的速度起吊, 等等). 它们所花的总时间和总油耗是不同的. 而当人们希望选择某种意义下最优的方式 (比如希望时间最短, 或者希望油料最省) 完成任务时, 最优控制问题就产生了. 我们还需要注意到, 由于起吊力的大小是有限的, 因此控制作用是有约束的. 此外, 吊臂的长度是有限的, 因此, 能够将重物起吊到的高度也是有限制的. 这表明, (最优) 控制问题中会存在各种各样的约束条件.

通常, 在用数学方式描述的最优控制问题中, 受控对象往往是一个动态方程, 可以是 (离散时间的) 差分方程, 常微分方程, 或者

是积分方程, 也可以是随机微分方程或偏微分方程, 甚至可以是上述一些方程的耦合组. 受控动态方程常称作控制系统或状态方程, 而它的解常称作系统的状态. 控制作用全体常常是某个函数集合. 另外还有一个评价控制作用好坏的性能指标. 控制的目的是最小化或最大化这个性能指标. 此外, 还可能存在若干状态和控制的约束条件. 所有这些加在一起便形成了一个最优控制问题的数学描述. 当状态方程是常微分方程时, 状态空间是有限维的, 当状态方程是随机微分方程或偏微分方程时, 状态空间是无限维的.

关于常微分方程系统的最优控制理论是本科高年级有关专业和硕士研究生运筹学与控制论专业的一门重要课程. 复旦大学数学学院开设这门课程已有二十余年的历史. 自从庞特里雅金等人 1960 年代初出版名著《最佳过程的数学理论》后, 出现了许多经典的最优控制理论专著或教材. 随着控制理论研究的发展, 若干经典著作或教材目前已略微显得过时了, 而一些近年出版的有关专著或教材又都比较艰深, 不太适合初学者. 因此, 提供一本能够反映最优控制理论发展的适合初学者的有限维最优控制理论简明教程成为一个比较迫切的任务.

本书的目的就是为本科高年级学生和硕士研究生提供一本简明的最优控制教程. 我们希望通过不长的篇幅, 简明扼要地叙述最优控制的基本理论. 主要内容包括: 最优控制问题的一般提法, 线性系统的时间最优控制, 一般非线性系统的最优控制存在性理论, 庞特里雅金最大值原理, 贝尔曼的动态规划方法及卡尔曼的线性二次最优控制理论. 每章末尾还配了一定的习题以供读者通过练习加深对章节中内容的理解. 此外, 为了使得让读者进一步了解最优控制理论的有关历史或最新进展, 我们还加了一些注记. 我们期望通过该课程的学习, 读者能够初步掌握最优控制理论的基本思想和数学技巧, 能够对其将来的学习, 研究和从事的工作有所帮助或启迪.

教材的初稿得到了汪更生教授、陈启宏教授和张旭教授的仔细审查，并提出了不少宝贵意见；在教材的试用中，复旦大学数学学院的师生也对教材的改进提出了许多有益的建议. 在此我们谨对他们致以衷心的感谢.

限于作者狭窄的知识面, 以及对最优控制理论肤浅的理解, 在本书中必有许多表达不够确切, 或者叙述不够严谨之处, 敬请读者不吝赐教.

雍炯敏　楼红卫

2006 年 3 月

目　　录

符 号 汇 编

常用记号

$\mathbb{R}^n$	n 维 Euclid 空间
x	$\mathbb{R}^n$ 中的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它常常被看作一个列向量
$x \cdot y$	$\mathbb{R}^n$ 中的数量积 $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$，也常常用 $\langle x, y\rangle$ 表示
$\|x\|$	$x \in \mathbb{R}^n$ 的长度 $(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$
$B_r(x)$	半径为 r 中心在 $x \in \mathbb{R}^n$ 的开球
I_n	n 阶单位矩阵，在不引起混淆时，通常省略下标 n
$A^\top$	矩阵 A 的转置
$\mathrm{rank}\ A$	矩阵 A 的秩
ϕ	空集
Ω	$\mathbb{R}^n$ 中的区域 (通常是有界且边界足够光滑的)
$\partial\Omega$	Ω 的边界
$\overline{\Omega}$	Ω 的闭包 $\Omega \bigcup \partial\Omega$
E^c	$\mathbb{R}^n$ 中集合 E 的补集 $\mathbb{R}^n \setminus E$
$\mathrm{co}\, E$	集合 E 的凸包

$\overline{\mathrm{co}}\, E$	集合 E 的凸闭包
$\lvert E\rvert$	$\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集 E 的 Lebesgue 测度
X^*	当 X 是一个算子时表示它的伴随算子；当 X 是 Banach 空间时表示它的对偶空间
∇f	函数 f(关于变量 x) 的梯度 $(f_{x_1}, f_{x_2}, \cdots, f_{x_n})$，也记作 Df
∂f	凸函数 f 的次微分
$\mathrm{d}x$	$\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$
p'	实数 $p \in [1, +\infty]$ 的对偶数 $p/(p-1)$, 当 $p = 1, +\infty$ 时取值分别约定为 $+\infty, 1$
$a \wedge b$	表示 $\min(a, b)$
$a \vee b$	表示 $\max(a, b)$
δ_{ik}	Kronecker 符号,

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$f(\cdot)$	指函数 f 本身
$f(x)$	指函数 f 在点 x 的取值
f'	$\mathbb{R}^1$ 中函数 f 的导数 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$(虽与上面对偶数的记号有冲突，但可根据上下文确定)
f^+	函数 f 的正部 $(\lvert f\rvert + f)/2$
f^-	函数 f 的负部 $(\lvert f\rvert - f)/2$

χ_E	集合 E 的特征函数, 该函数在 E 上取值 1，在其它点取值 0
I_E	集合 E 的示性函数，该函数在 E 上取值 0，在其它点取值 $+\infty$
inf (sup)	函数的下确界 (上确界)
essinf (esssup)	函数的本性下确界 (本上确界)
C	表示只依赖于一些给定参数的绝对常数 (常常是正的)，在不同的式子中，它的取值可以是不同的
$\exists$	存在
$\forall$	(对于) 所有
a.e.	几乎处处
$\subset\subset$	集合的紧包含关系，$\Omega_0 \subset\subset E$ 当且仅当 $\overline{\Omega}_0 \subseteq E$
$\triangleq$	表示定义. 例如 $f(x) \triangleq 2x+1$ 表示将 $f(x)$ 定义为 $2x+1$

函数空间

$C(\Omega)$ (或 $C(\overline{\Omega})$)	Ω(或 $\overline{\Omega}$) 中连续函数全体
$C^k(\Omega)$ $(C^{k,\alpha}(\Omega))$	Ω 中 k 次连续可微的函数类 (它们的 k 阶微商满足指数为 α 的 Hölder 条件), $C^{0,\alpha}(\Omega)$ 简记为 $C^{\alpha}(\Omega)$
$C^k(\overline{\Omega})$ $(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}))$	Ω 中的函数类, 其中每个元 f 都可以将定义域延拓到 $\overline{\Omega}$ 的某个邻域 $\mathcal{Q}$, 使得 f 属于 $C^k(\mathcal{Q})(C^{k,\alpha}(\mathcal{Q}))$, $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ 简记为 $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$
$L^p(E)$	Ω 中 p $(1 \le p < +\infty)$ 次 Lebesgue 可积函数全体，它的元素 f 赋予范数 $\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E \|f\|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} < +\infty$
$L^{\infty}(E)$	本性有界的 Lebesgue 可测函数全体，它的元素 f 赋予范数 $\|f\|_{L^{\infty}(E)} = \inf\{M \| \|f\| \le M, \text{ a.e. } E\}$
$L^p_{loc}(E)$	E 中的函数集 (E 是一个区域加上一些可能的边界点)，它的元素 f 满足 $f \in L^p(E_0)$, $\forall\ E_0 \subset\subset E$，此时 $L^p_{loc}(E)$ 本质上与 E 的边界点属于不属于 E 是有关的

第一章　　引　言

§1. 函数极值、变分问题及最优控制

最优控制问题可以看成是函数极值问题和变分问题的拓展. 在很多方面，最优控制问题仍保留着函数极值和变分问题的基本特性. 处理最优控制问题的思想和方法也往往可以从处理函数极值问题的理论和经典变分学中找到. 因此，有必要首先把函数极值问题、变分问题和最优控制问题放在一起做一个回顾.

函数极值

例 1.1. 设 $G \subseteq \mathbb{R}$, $J : G \to \mathbb{R}$ 是一个 C^1 函数. 我们的问题是要寻找 $J(\cdot)$ 在 G 上的最小值. 这立刻涉及到两个基本问题: (i) $J(\cdot)$ 是否在 G 上有最小值? (ii) 如果 $J(\cdot)$ 在 G 上存在最小值, 我们如何刻画最小值点?

首先我们来看 (i). 如果 G 是紧集 (即有界闭集)，则众所周知 $J(\cdot)$ 在 G 上一定取到最小值. 但是，如果 G 不是紧集，情况就会复杂一些. 此时，为保证最小值的存在，我们就需要更多的假设. 譬如当 $G = \mathbb{R}$ 时，如果

$$\lim_{|x|\to\infty} J(x) = +\infty, \tag{1.1}$$

则 $J(\cdot)$ 在 G 上有最小值. 我们称 (1.1) 为 $J(\cdot)$ 的**强制性条件**. 现在，再来看 (ii). 假如已经知道 $J(\cdot)$ 有一个最小值点 $\bar{x} \in G$, 我们希望把它刻画出来. 由最小性，我们有

$$J(x) \geq J(\bar{x}), \qquad \forall\, x \in G. \tag{1.2}$$

如果 $G=(a,b)$，则对于任何充分小的 $\delta>0$，总有 $\bar{x}\pm\delta\in G$, 从而，由 (1.2) 可得

$$0\leq\frac{1}{\delta}[J(\bar{x}\pm\delta)-J(\bar{x})]\to\pm J'(\bar{x}).$$

这样，就得到所谓的**一阶必要条件**：

$$J'(\bar{x})=0. \tag{1.3}$$

如果 (1.3) 有惟一解 $\bar{x}$，而且我们知道 $J(\cdot)$ 在 (a,b) 内一定存在最小值，那么 $\bar{x}$ 就一定是最小值点.

当我们并不知道 $J(\cdot)$ 是否存在最小值时，如果 $J(\cdot)$ 是 C^2 函数，且 (1.3) 成立，则由 Taylor 展式，在 $\bar{x}$ 附近，

$$J(x)-J(\bar{x})=\frac{1}{2}J''(\bar{x})(x-\bar{x})^2+o(|x-\bar{x}|^2).$$

从而，如果

$$J''(\bar{x})>0, \tag{1.4}$$

则我们可以断言 $\bar{x}$ 是一个局部最小值点 (极小值点). 于是条件 (1.3) 和 (1.4) 就构成 $\bar{x}$ 为极小值点的一个充分条件. 另一方面，可以看到 $J''(\bar{x})\geq 0$ 是 $\bar{x}$ 为最 (极) 小值点的一个二阶必要条件.

如果 G 是一个较为一般的集合，情况就会相当复杂. 这时，即使 (1.2) 成立，(1.3) 也可能不成立. 请看下例和习题 1.

例 1.2. 设 $J,F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是两个 C^1 函数,

$$F^{-1}(0)\stackrel{\triangle}{=}\{x\in\mathbb{R}^n|F(x)=0\}\neq\phi.$$

我们希望在 $F^{-1}(0)$ 上最小化 $J(\cdot)$, 即

$$\text{在条件 } F(x)=0 \text{ 下最小化 } J(x). \tag{1.5}$$

假设 $J(\cdot)$ 满足强制性条件 (1.1) (其中 $G=\mathbb{R}$ 用 $G=\mathbb{R}^n$ 代替). 此时，可以证明存在 $\bar{x}\in F^{-1}(0)$ 使得

$$J(\bar{x})=\inf_{x\in F^{-1}(0)} J(x).$$

进一步，如果 $F_x(\bar{x})\neq 0$, 则 $\bar{x}$ 满足如下的必要条件: 存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ (λ 称为 **Lagrange 乘子**)满足

$$\begin{cases} J_x(\bar{x})+\lambda F_x(\bar{x})=0, \\ F(\bar{x})=0. \end{cases} \tag{1.6}$$

这样，一旦 $\lambda\neq 0$, 我们就有 $J_x(\bar{x})\neq 0$, 此时，(1.3) 不成立.

下面，我们给出 (1.6) 的一个证明思路. 由于 $F_x(\bar{x})\neq 0$, 它就给出了曲面 $F(x)=0$ (即 $F^{-1}(0)$) 的一个法向量. 这样，对任何 $v\perp F_x(\bar{x})$, 存在 C^1 曲线 $\varphi:[-\varepsilon,\varepsilon]\to F^{-1}(0)$ 使得 $\varphi(0)=\bar{x}$, 且 $\dot{\varphi}(0)=v$. 于是，由 $\bar{x}$ 的极小性, 以及 $\varphi(t)\in F^{-1}(0)$, 我们有

$$0\leq \frac{1}{\delta}\big[J(\varphi(\pm\delta))-J(\bar{x})\big]\to \pm\langle J_x(\bar{x}),v\rangle.$$

因此，对任何 $v\perp F_x(\bar{x})$, 都有 $J_x(\bar{x})\perp v$. 由此可得

$$J_x(\bar{x})\in \big(\{F_x(\bar{x})\}^{\perp}\big)^{\perp}=\ \mathrm{span}\ \{F_x(\bar{x})\}, \tag{1.7}$$

其中 $\{A\}^{\perp}$ 和 $\mathrm{span}\ \{A\}$ 分别表示 A 的**正交补**和由 A 张成的线性空间. 最后，由 (1.7) 立即得到结论 (1.6).

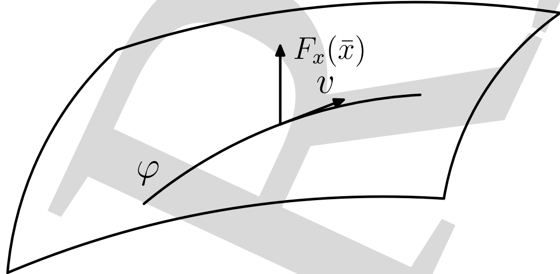


图 1.1

上面的证明是基于几何的思想得到的. 读者可以从一般的数学分析教材中找到基于隐函数存在定理的一个证明.

变分问题

例 1.3. 设 $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$, 则众所周知:

$$\text{连接 } a \text{ 和 } b \text{ 的最短的(光滑)曲线是直线.} \tag{1.8}$$

人们可以从几何的角度证明 (1.8). 以下，我们从分析的角度来证明结论. 该问题尽管非常简单，但还是包含了许多原始的思想. 不失一般性，我们可设 $a = (0, 0)$，$b = (1, 0)$. 记

$$Y = \left\{ y(\cdot) \in C^1[0, 1] \middle| y(0) = y(1) = 0 \right\},$$

则对任何 $y(\cdot) \in Y$, 曲线 $x \mapsto (x, y(x))$, $x \in [0, 1]$ 的长度为

$$J(y(\cdot)) \triangleq \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{y}(x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

我们有如下问题

问题 (L). 寻找 $\bar{y}(\cdot) \in Y$, 使得

$$J(\bar{y}(\cdot)) = \inf_{y(\cdot) \in Y} J(y(\cdot)).$$

现在，我们来证明 (1.8). 令 $\bar{y}(x) \equiv 0$, 则 $\bar{y}(\cdot) \in Y$，且对任何 $y(\cdot) \in Y$, 有 $\dot{y}(x)^2 \geq 0$, 从而

$$J(\bar{y}(\cdot)) = 1 \leq \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{y}(x)^2}\, \mathrm{d}x = J(y(\cdot)). \tag{1.9}$$

因此，$\bar{y}(\cdot)$ 是问题 (L) 的一个解, 它是直线段. 另一方面，易见如果 $y(x) \not\equiv 0$, 则在 $[0, 1]$ 的某个子区间上，$\dot{y}(x)^2 > 0$，此时，(1.9) 中严格不等式成立. 这表明最小值点是惟一的.

例 1.4. (捷线问题) 考虑一个铅直平面, 在其上建立直角坐标系, 纵轴 y 轴指向下方. 给定两点 $(0,0)$ 及 (a,b) 使得 $a>0, b>0$. 令 $y(\cdot)$ 为连接这两个点的一条 C^1 曲线, 即 $y(0)=0$, $y(a)=b$. 一个粒子受重力作用以初速 0 沿曲线 $y(\cdot)$ 从 $(0,0)$ 点滑向 (a,b). 我们关心的问题是如何选择 $y(\cdot)$ 使得该粒子从 $(0,0)$ 滑到 (a,b) 的时间最短.

假设粒子具有质量 m. 用 $s(t)$ 表示该粒子从点 $(0,0)$ 出发后在时间段 $[0,t]$ 内 (沿着曲线) 走过的路程. 于是 $\dot{s}=v$ 就是粒子的线速度. 由能量守恒定律，我们有

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy,$$

其中 y 是粒子离开初始位置的垂直位移. 这样，$v=\sqrt{2gy}$, 从而，

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}}=\frac{\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}}.$$

因此，粒子移动到 (a,b) 所需的时间为

$$t=\int_0^a\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x\triangleq J(y(\cdot)).$$

于是，原始问题就化为在条件 $y(0)=0$ 和 $y(a)=b$ 下，最小化泛函 $J(y(\cdot))$ 的变分问题.

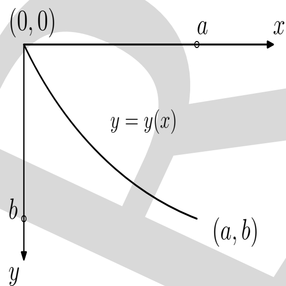


图 1.2

最优控制问题

例 1.5. 考虑一部电梯. 假设电梯的总质量为 m, 离地距离为 y. 令 $F(t)$ 为时刻 t 时引擎给予电梯的力. 由 Newton 第二定律, 我们有

$$m\ddot{y}(t) = F(t).$$

自然地, 我们需要假定电梯引擎的功率是有限的: 对于某个 $F_0 > 0$,

$$|F(t)| \leq F_0. \tag{1.10}$$

假设电梯的初始状态是静止在地面 $(y = 0)$, 即

$$y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = 0.$$

我们希望移动电梯使之在时刻 $t = T$ 停在高度 $y = h$. 这可以表示为

$$y(T) = h, \qquad \dot{y}(T) = 0.$$

这里, $t = T$ 是一个未知的时刻. 我们的目的是在最短的时间内到达高度 h. 注意到在没有引擎功率约束的情况下 (即当 $F_0 = +\infty$ 时), $T > 0$ 能够任意地小. 自然这是没有实际意义的. 因此约束条件 (1.10) 使我们的问题变得实际.

从经验来看, 达到目的的最佳方法应该是:

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \leq y(t) \leq \frac{h}{2}, \\ -F_0, & \frac{h}{2} < y(t) < h, \\ 0, & y(t) = h. \end{cases}$$

我们现在就来证明上面的策略是最好的. 按所需的条件，我们有

$$\int_0^T F(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^T m\ddot{y}(t)\ \mathrm{d}t = m\big[\dot{y}(T) - \dot{y}(0)\big] = 0,$$

$$\int_0^T \mathrm{d}s \int_0^s F(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^T m\dot{y}(s)\ \mathrm{d}s = my(T) = mh.$$

因此，

$$\begin{aligned} mh &= \int_0^T \mathrm{d}t \int_t^T F(t)\ \mathrm{d}s = \int_0^T (T-t)F(t)\ \mathrm{d}t \\ &= T\int_0^T F(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^T tF(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^T tF(t)\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

从而，

$$-mh = \int_0^T (t+r)F(t)\ \mathrm{d}t, \qquad \forall\ r \in \mathbb{R}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} mh &\le \int_0^T |t+r|\ |F(t)|\ \mathrm{d}t \le F_0 \int_0^T |t+r|\ \mathrm{d}t \\ &= F_0 \int_r^{T+r} |t|\ \mathrm{d}t, \qquad \forall\ r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

因此,

$$\frac{mh}{F_0} \le \inf_{r\in\mathbb{R}} \int_r^{T+r} |t|\ \mathrm{d}t.$$

记 $\varphi(r) = \int_r^{T+r} |t|\ \mathrm{d}t$. 为寻找 $\varphi(\cdot)$ 的最小值, 我们令

$$0 = \varphi'(r) = |T+r| - |r|,$$

得到 $r = -\frac{T}{2}$. 于是,

$$\frac{mh}{F_0} \le \varphi(-\frac{T}{2}) = \int_{-T/2}^{T/2} |t|\ \mathrm{d}t = \frac{T^2}{4}.$$

由此可见,

$$T \geq 2\sqrt{\frac{mh}{F_0}} \triangleq t^*.$$

下面，我们要证明 t^* 是所需的最短时间．为此，记

$$F^*(t) = -F_0 \ \mathrm{sgn}\ \big(t - \frac{t^*}{2}\big) \equiv \begin{cases} F_0, & 0 \leq t < \frac{t^*}{2}, \\ -F_0, & \frac{t^*}{2} < t < t^*. \end{cases}$$

则相应的 $y^*(\cdot)$ 满足:

$$m\dot{y}^*(t^*) = \int_0^{t^*} F^*(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{t^*/2} F_0\ \mathrm{d}t - \int_{t^*/2}^{t^*} F_0\ \mathrm{d}t = 0,$$

以及

$$\begin{aligned} my^*(t^*) &= \int_0^{t^*} \mathrm{d}s \int_0^s F^*(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{t^*} (t^* - t)F^*(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^{t^*} tF^*(t)\ \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{t^*/2} F_0 t\ \mathrm{d}t + \int_{t^*/2}^{t^*} F_0 t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{F_0}{4}(t^*)^2 = mh. \end{aligned}$$

从而，

$$\dot{y}^*(t^*) = 0, \qquad y^*(t^*) = h.$$

因而 t^* 是最短的时间，而相应的推进力是 $F^*(\cdot)$.

接下来，我们来做一些进一步的观察．当 $0 \leq t < t^*/2$ 时,

$$my^*(t) = \int_0^t (t-s)F_0\ \mathrm{d}s = \frac{F_0 t^2}{2} < \frac{F_0(t^*)^2}{8} = \frac{mh}{2}.$$

这样，

$$y^*(t) \begin{cases} \in [0, \dfrac{h}{2}), & 0 \leq t < \frac{t^*}{2}, \\ = \dfrac{h}{2}, & t = \frac{t^*}{2}. \end{cases}$$

类似地，我们有

$$y^*(t)\begin{cases} \in (\frac{h}{2}, h), & \frac{t^*}{2} < t < t^*, \\ = h, & t = t^*. \end{cases}$$

因此，$F^*(\cdot)$ 有以下表达式:

$$F^*(t) = \begin{cases} F_0, & y^*(t) \in [0, \frac{h}{2}), \\ -F_0, & y^*(t) \in \left(\frac{h}{2}, h\right). \end{cases}$$

这就证实了我们直觉所给出的结果.

在这个问题中，推进力 F 是我们可以操纵的变量. 在本课程中，这一变量称为**控制 (变量)**. 相应地，F^* 称为**最优控制**.

例 1.6. 考虑一个准备在月球上软着陆的航天器，设其质量为 $m(t)$ (包括燃料，从而，它与时间有关). 令 $y(t)$ 为航天器与月球的距离，$u(t)$ 为推进力 (由燃烧燃料产生)，g 为月球的引力常数. 在这里，$u(\cdot)$ 是控制变量. 由 Newton 第二定律，并注意到 $|\dot{m}(t)| = -\dot{m}(t)$ 与推进力 $u(t)$ 成正比 (即燃料的消耗率正比于推进力的大小)，我们有

$$\begin{cases} m\ddot{y}(t) = -m(t)g + u(t), \\ \dot{m}(t) = -ku(t). \end{cases} \tag{1.11}$$

进一步，我们还需要以下的约束条件:

$$\begin{cases} 0 \le u(t) \le \alpha, \\ \dot{y}(0) = v_0, \quad m(0) = m_0, \\ y(T) = \dot{y}(T) = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

我们的问题是选择控制 $u(\cdot)$ 使得 (1.11)–(1.12) 成立且消耗的燃料总量 $m(0) - m(T)$ 最小.

例 1.7. 考虑某企业, 生产某种产品, 其货存量记为 $y(t)$. 令 $r(t)$ 为销售速度, $u(t)$ 为生产速度, 则 $y(\cdot)$ 满足

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -r(t) + u(t), \\ y(0) = y_0 > 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

而在时间段 $[0, T]$ 内假设储存和生产的成本为

$$J(u(\cdot)) \triangleq \int_0^T \big[by(t) + c(u(t))\big] \, \mathrm{d}t. \tag{1.14}$$

易见, 我们有以下约束条件:

$$\begin{cases} y(t) \geq 0, \\ 0 \leq u(t) \leq \alpha, \end{cases} \qquad t \in [0, T], \tag{1.15}$$

其中 $\alpha > 0$ 是最大生产速度. 问题便是在条件 (1.13), (1.15) 下选择 $u(\cdot)$ 使得 (1.14) 最小. 这里生产速度 $u(\cdot)$ 扮演了控制的角色.

从上面的例子大致可以看到, 函数极值问题、变分问题和最优控制问题研究的都是极值 (最值) 问题. 但在函数极值问题中, 情况最为简单. 在那里要寻找的解是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点, 相应的指标是一个函数, 两者的对应关系非常直接. 对于变分问题, 情况变得要复杂一些, 这时候, 要寻找的解是一个函数, 而评判的指标则是一个泛函, 它由所求函数本身及其导数直接决定. 所以这是一个泛函极值 (最值) 问题. 请读者注意, 这里指标依赖于函数的导数使得变分问题本质上有别于函数极值问题. 最优控制问题尽管也是泛函极值问题, 而且它要寻找的最优控制也是一个函数, 但是指标并不是直接依赖于控制函数本身, 而是通过另一个称为状态变量的函数与控制函数一起来确定指标的值. 状态变量与控制变量之间则通过一个动态方程发生联系.

不难看到函数极值问题可以看作变分问题的特例 (尽管这样看意义不大), 而变分问题又可以看作最优控制问题的特例. 今后

我们还将看到, 一方面, 从函数极值问题到变分问题, 再发展到最优控制问题的研究, 每一步都产生了新的思想, 另一方面, 在这些学科中, 某些最基本的思想还是相通的和非常有效的.

§2. 最优控制问题的一般形式

本节中，我们将给出最优控制问题的一般提法. 同时，我们将建立各种最优控制问题间的等价性.

一般最优控制问题

控制系统(简称**系统**) 可以视为一个“黑箱”. 人们将一种称为**输入**的行为作用于它, 并通过它得到一种称为**输出**的结果. 这样，人们就可以认为系统给出了由输入得到输出的一种**关系**. 在输入和输出的中间，有一个重要的事物，称为 (系统的)**状态**. 从输入到状态的过程称为**控制**，而从状态到输出的过程称为**观测**. 由于这些原因，我们分别简称输入和输出为**控制**和**观测**. 一般来说，人们所能看到的是输出，而状态一般是不能直接观察到的. 在数学上，如果我们可以从输出完整地将状态构造出来，我们就称系统是完全**能观的**. 对于这种情形，我们可以简单地将输出和状态等同起来. 而这正是我们在本书的余下部分要讨论的情形.

我们可以想象，输入与状态之间的关系可以相当的复杂. 为了研究这一过程，我们需要忽略一些相对不太重要的因素. 今后，我们将仅仅考虑输入到状态的过程可以由常微分方程描述的情形.

考虑以下常微分方程:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \qquad t \in [0, T]. \tag{2.1}$$

在上面的方程中, $y(t)$ 取值于 $\mathbb{R}^n$, 表示系统在 t 时刻的状态 (或输出); $u(t)$ 取值于某个度量空间 U, 表示在 t 时刻的控制 (或输入). 系统的演化由给定的映射 $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$ 确定. 我们称 (2.1) 为**状态方程**. 在一定条件下，我们可以证明对于集合

$$\mathscr{U}[0,T]\triangleq\{u:[0,T]\to U\;\big|\;u(\cdot)\text{ 可测}\}$$

中的控制 $u(\cdot)$ 以及任何**初始状态** $y_0\in\mathbb{R}^n$, 状态方程 (2.1) 有惟一的解 $y(\cdot)\triangleq y(\cdot\,;y_0,u(\cdot))$, 称为控制 $u(\cdot)$ 作用下始于 y_0 的**状态轨线**. 记

$$\begin{cases}\mathcal{Y}[0,T]\triangleq\big\{y(\cdot\;;y_0,u(\cdot))\;\big|\;y_0\in\mathbb{R}^n,\;u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]\big\},\\ \mathcal{P}[0,T]\triangleq\big\{(y(\cdot\;;y_0,u(\cdot)),u(\cdot))\;\big|\;y_0\in\mathbb{R}^n,\,u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]\big\}.\end{cases}$$

任何 $(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}[0,T]$ 称为 状态 – 控制对. 通常，对于状态和控制会有一些约束. 在我们所考虑的范围内，最一般的形式应该是

$$F(y(\cdot),u(\cdot))\in\Gamma,\tag{2.2}$$

其中 Γ 是某个度量空间 Γ_0 的一个子集，而 $F:C([0,T];\mathbb{R}^n)\times\mathscr{U}[0,T]\to\Gamma_0$ 是一个给定的映射. 令 $\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$ 由满足如下条件的状态 – 控制对组成：$u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]$, $y(\cdot)$ 是方程 (2.1) 相应于控制 $u(\cdot)$ 和初始状态 y_0 的解, 使得约束条件 (2.2) 满足. 需要注意的是对于同一个控制 $u(\cdot)$, 由于初始状态 $y_0\in\mathbb{R}^n$ 的变化，可能会有方程 (2.1) 满足 (2.2) 的多个解. 任何 $(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$ 称为一个**可行对**; 而 $y(\cdot)$ 和 $u(\cdot)$ 则分别称为**可行状态轨线**和**可行控制**. 记所有可行状态轨线的集合为 $\mathcal{Y}_{F,\Gamma}[0,T]$，所有可行控制的集合为 $\mathscr{U}_{F,\Gamma}[0,T]$. 一般说来，可行对集 $\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$ 依赖于映射 F 和集合 Γ, 从而它有可能是空集. 自然，$\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$ 非空当且仅当 $\mathscr{U}_{F,\Gamma}[0,T]$ 非空. 当 $\Gamma=\Gamma_0$ 时, (2.2) 总是成立，这意味着事实上没有约束. 此时，$\mathscr{U}_{F,\Gamma}[0,T]=\mathscr{U}[0,T]$.

现在，我们给出约束 (2.2) 的一些特例.

1. 初始状态和终端状态独立约束 设 $S_0, S_T \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集. 考虑以下约束:

$$y(0) \in S_0,\ y(T) \in S_T. \tag{2.3}$$

对于这种情形，我们只需要定义

$$\begin{aligned} &F(y(\cdot),u(\cdot)) = (y(0),y(T)),\\ &\qquad\qquad \forall\ (y(\cdot),u(\cdot)) \in C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathscr{U}[0,T], \end{aligned} \tag{2.4}$$

以及 $\Gamma = S_0 \times S_T$, $\Gamma_0 = \mathbb{R}^{2n}$. 该情形的一个特例是 $S_0 = \{y_0\}$ 及 $S_T = \{y_T\}$ 为两单点集, 称为**固定端点约束**.

2. 初始状态和终端状态联合约束 这是以上情形的推广. 令 $S \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. 考虑约束:

$$(y(0), y(T)) \in S.$$

对于这一情形，我们可以用 (2.4) 定义 F，而令 $\Gamma = S$, $\Gamma_0 = \mathbb{R}^{2n}$. 该情形一个有趣的特例是所谓**周期约束**:

$$y(0) = y(T). \tag{2.5}$$

3. 点状状态约束 给定 $S : [0,T] \to 2^{\mathbb{R}^n}$. 考虑状态约束:

$$y(t) \in S(t), \qquad \forall\ t \in [0,T].$$

在这一情形，我们可以定义

$$F(y(\cdot),u(\cdot)) = y(\cdot), \quad \forall\ (y(\cdot),u(\cdot)) \in C([0,T];\mathbb{R}^n) \times \mathscr{U}[0,T],$$

以及

$$\begin{aligned} &\Gamma = \{x(\cdot) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n) \big| x(t) \in S(t),\ \forall\ t \in [0,T]\},\\ &\Gamma_0 = L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

其中一个有趣的特例是

$$y(t) \geq 0, \qquad t \in [0,T].$$

4. 积分约束 令 $S \subseteq \mathbb{R}^m$, $g:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^m$ 是一给定的映射. 考虑关于状态和控制的约束:

$$\int_0^T g(t,y(t),u(t))\ \mathrm{d}t \in S.$$

此时，可定义

$$\begin{aligned} F(y(\cdot),u(\cdot)) = &\int_0^T g(t,y(t),u(t))\ \mathrm{d}t, \\ &\forall (y(\cdot),u(\cdot)) \in C([0,T];\mathbb{R}^n)\times\mathscr{U}[0,T], \end{aligned}$$

以及 $\Gamma = S$, $\Gamma_0 = \mathbb{R}^m$.

我们可以构造由 (2.2) 所涵盖的其他更多类型的约束.

研究集合 $\mathscr{U}_{F,\Gamma}[0,T]$ 非空性的问题称为**能控性**问题. 这是一个非常难的问题，迄今为止，还没有一个非常令人满意的一般性理论. 我们将在以后对这一问题做适当的讨论.

现在，假设 $\mathscr{U}_{F,\Gamma}[0,T]$ 非空, 则该集合可能包含多个控制. 一个自然的问题是 (在某种意义下) 哪个控制是最好的. 为了评价某一个控制，对于 $(y(\cdot),u(\cdot)) \in \mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$，我们引入某种形式的**性能指标 (指标泛函)** $J(y(\cdot),u(\cdot))$. 通常，$J(\cdot,\cdot)$ 的定义域可能小于 $\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$(即使没有约束时，也可能出现这种情况). 这样，我们就必须把 $\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$ 中的某些元排除出我们的考虑范围. 记

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{ad}[0,T] \triangleq \mathcal{D}(J) \\ \equiv\ &\big\{(y(\cdot),u(\cdot)) \in \mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T] \ \big|\ J(y(\cdot),u(\cdot))\text{有定义}\big\}. \end{aligned}$$

任何一对 $(y(\cdot),u(\cdot)) \in \mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 称为**允许对**，而 $y(\cdot)$ 和 $u(\cdot)$ 分别称为**允许状态轨线**和**允许控制**. 分别记所有允许状态轨线和允许

控制的集合为 $\mathcal{Y}_{ad}[0,T]$ 和 $\mathscr{U}_{ad}[0,T]$. 进一步，易见 $\mathscr{U}_{ad}[0,T]$ 非空当且仅当 $\mathcal{Y}_{ad}[0,T]$ 非空.

现在，我们叙述以下的最优控制问题.

问题 (GC). 寻找 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,T]$, 使得

$$J(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))=\inf_{(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,T]}J(y(\cdot),u(\cdot)). \tag{2.6}$$

满足 (2.6) 的任一对 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 称为**最优对**，而相应的 $\bar{y}(\cdot)$ 和 $\bar{u}(\cdot)$ 分别称为**最优状态轨线**和**最优控制**.

下面我们给出性能指标的一些重要例子.

1. Mayer 型泛函 假设我们只对状态在最后时刻 $t=T$ 的状况感兴趣. 例如，我们希望使最后状态 $y(T)$ 接近于某个特殊的值, 则我们可以定义性能指标为

$$J_M(y(\cdot),u(\cdot))=h(y(T)),\qquad\forall\,(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{D}(J_M),$$

其中 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为一给定的映射. 这类泛函称为 Mayer 型泛函. 如果 $h(\cdot)$ 是有限的,特别当它是连续的时候,则对任何 $(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$，$J_M(y(\cdot),u(\cdot))$ 都是适定的. 于是，在这种情形，我们有 $\mathcal{P}_{ad}[0,T]=\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$. 然而，当 $h(\cdot)$ 可以取值无限，譬如当 $h(\cdot)$ 是一个可以取值为 $+\infty$ 的下半连续函数 (详见第四章) 时，一般说来，$\mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 就会不同于 $\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$. 当我们所取的性能指标是 $J_M(\cdot)$ 时，相应的问题 (GC) 就称为 **Mayer 问题**. 为简单起见，记为 (M) 问题.

2. Lagrange 型泛函 假设我们只对状态在 $[0,T]$ 时间段内状态和控制的状况感兴趣. 例如，我们希望在 $[0,T]$ 时段能使状态轨线接近于某一条给定的轨线，而同时希望花费相应的能量尽可能

少. 为此，我们可以选取一个 $f^0:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$，设计具有以下形式的性能指标：

$$J_L(y(\cdot),u(\cdot))=\int_0^T f^0(t,y(t),u(t))\mathrm{d}t,\qquad \forall\ (y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{D}(J_L).$$

这样的泛函称为 Lagrange 型泛函. 显然，

$$\mathcal{D}(J_L)=\Big\{(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]\Big|\ f^0(\cdot\ ,y(\cdot),u(\cdot))\in L^1(0,T;\mathbb{R})\Big\}.$$

从而，一般情况下，$\mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 包含于 $\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$. 当 $f^0(\cdot\ ,\cdot\ ,\cdot)$ 有界时，我们可知集合 $\mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 等同于 $\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$. 当我们所取的性能指标是 $J_L(\cdot)$，相应的问题 (GC) 就称为 **Lagrange 问题**(简称 (L) 问题).

3. Bolza 型泛函 假设我们现在不仅对 $[0,T]$ 时间段内状态和控制的状况感兴趣，还对最后的状态感兴趣, 则我们结合上面两种情形，设计具有以下形式的性能指标：

$$\begin{aligned}J_B(y(\cdot),u(\cdot))=h(y(T))+\int_0^T f^0(t,y(t),u(t))\mathrm{d}t,\\ \forall\ (y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{D}(J_B),\end{aligned}$$

其中，$h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f^0:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$. 这样的泛函称为 Bolza 型泛函. 根据前面的讨论，我们知道，一般情况下，$\mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 包含于 $\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$. 当我们所取的性能指标是 $J_B(\cdot)$，相应的问题 (GC) 就称为 **Bolza 问题**(简称 (B) 问题).

下面，我们介绍 (B) 问题的一个重要特例. 考虑以下形式的状态方程：

$$\begin{cases}\dot y(t)=A(t)y(t)+B(t)u(t), & t\in[0,T],\\ y(0)=y_0,\end{cases}$$

其中 $A(\cdot) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times n})$，$B(\cdot) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})$. 控制域是 $U=\mathbb{R}^m$，没有约束. 而性能指标定义为

$$J(u(\cdot)) = \langle Gy(T), y(T)\rangle + \int_0^T \big\{\langle Q(t)y(t), y(t)\rangle + \langle R(t)u(t), u(t)\rangle\big\}\mathrm{d}t, \quad (2.7)$$

其中 $Q(\cdot) \in L^\infty(0,T;\mathbf{S}^n)$, $R(\cdot) \in L^\infty(0,T;\mathbf{S}^m)$, $G \in \mathbf{S}^n$ ($\mathbf{S}^n$ 是所有 $(n\times n)$ 阶对称阵的全体). 所谓**线性二次最优控制问题** (简称 LQ 问题)是要寻找一个控制 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}[0,T]$ 最小化 (2.7). 易见,

$$\mathscr{U}_{ad}[0,T] \supseteq L^2(0,T;\mathbb{R}^m).$$

但是一般说来，$\mathscr{U}[0,T] \neq \mathscr{U}_{ad}[0,T]$.

Mayer, Lagrange 和 Bolza 问题的等价性

在一定的条件下，(M) 问题、(L) 问题和 (B) 问题都是等价的. 我们有：

命题 2.1. (i) (M) 问题和 (L) 问题是 (B) 问题的特例.

(ii) (B) 问题是 (M) 问题的特例.

(iii) 如果 $h(\cdot)$ 绝对连续，且约束条件使得初始状态 $y(0)=y_0$ 固定，那么 (B) 问题是 (L) 问题的特例.

证明. (i) 是显然的.

(ii) 考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 (M) 问题，其状态 $\mathbf{y}(\cdot) = (y^0(\cdot), y(\cdot))$ 满足以下方程：

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} f^0(t,y(t),u(t)) \\ f(t,y(t),u(t)) \end{pmatrix}, \qquad t\in[0,T],$$

性能指标为

$$J_M(\mathbf{y}(\cdot),u(\cdot))=h(y(T))+y^0(T)=J_B(y(\cdot),u(\cdot)),$$

约束条件同原始问题的约束加上 $y^0(0)=0$, 则我们可以看到 (B) 问题是 (M) 问题的特例.

(iii) 对于 $h(\cdot)$ 为绝对连续、初始状态 $y(0)=y_0$ 固定的情形，我们考虑具有以下性能指标的 (L) 问题：

$$\begin{aligned}&J_L(y(\cdot),u(\cdot))\\=&\int_0^T\left[f^0(t,y(t),u(t))+\langle h_y(y(t)),f(t,y(t),u(t))\rangle\right]\mathrm{d}t,\\&\qquad\forall\ (y(\cdot),u(\cdot))\in D(J_L).\end{aligned}\tag{2.8}$$

由于初始状态 $y(0)=y_0$ 固定，最小化由 (2.8) 定义的 $J_L(y(\cdot),u(\cdot))$ 等价于最小化以下泛函：

$$\begin{aligned}&J_L(y(\cdot),u(\cdot))+h(y_0)\\=&\ h(y(T))+\int_0^T f^0(t,y(t),u(t))\mathrm{d}t\\=&\ J_B(y(\cdot),u(\cdot)).\end{aligned}$$

这样，我们就得到了 (iii). □

其他类型的问题

现在，我们简短地介绍一些其他类型的最优控制问题.

1. 不定时间区域问题

在上面的讨论中，时间区域 $[0,T]$ 是固定的. 因此，我们称它们为**固定时间区域问题**. 在实际应用中，同样需要处理时间区域变

化的问题. 一个典型的问题是所谓的**时间最优控制问题**. 以下，我们先来介绍这一问题. 考虑状态方程 (2.1), 其中 $T>0$ 不是固定的，状态约束为 (2.3)，性能指标是

$$J(y(\cdot),u(\cdot))=T, \qquad \forall\ (y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T].$$

最优控制问题是寻找一个控制使得状态 $y(\cdot)$ 在最短的时间内，从 $y_0\in S_0$ 到达目标集 S_T. 这一问题称为时间最优控制问题 (简称 (T) 问题).

更一般的情形下，我们提出所谓**不定时间区域的最优控制问题**(简称 (N) 问题) 如下. 考虑一个控制系统 (2.1)，其中 $T>0$ 不必是固定的. 约束条件具有以下形式 (比较 (2.2)):

$$F(T,y(\cdot),u(\cdot))\in\Gamma, \tag{2.9}$$

其中 Γ 是某个度量空间 Γ_0 的子集，$F:[0,+\infty)\times C([0,+\infty);\mathbb{R}^n)\times\mathscr{U}[0,+\infty)\to\Gamma_0$ 是一个给定的映射，其中 $\mathscr{U}[0,+\infty)$ 的定义方式是显然的. 我们令 $\mathscr{T}_{F,\Gamma}$ 是这样一些三元组 $(T,y(\cdot),u(\cdot))$ 的集合：$u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]$, $y(\cdot)$ 是方程 (2.1) 相应于 $u(\cdot)$ 以及某个初始状态 y_0 的解，它满足约束条件 (2.9). 现在，性能指标的形式应该为 $J(T,y(\cdot),u(\cdot))$. 相应的最优控制问题就称为不定时间区域最优控制问题. 同样，这时的性能指标仍可以具有 J_M、J_L 或 J_B 的形式. 由于 $T>0$ 不是固定的，我们有

$$J_M(T,y(\cdot),u(\cdot))=h(T,y(T)), \quad \forall\ (y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{D}(J_M),$$

其中 $h:[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是个给定的映射;

$$J_L(T,y(\cdot),u(\cdot))=\int_0^T f^0(t,y(t),u(t))\mathrm{d}t, \quad \forall\ (y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{D}(J_L),$$

其中 $f^0:[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$; 而

$$J_B(T,y(\cdot),u(\cdot))=h(T,y(T))+\int_0^T f^0(t,y(t),u(t))\mathrm{d}t, \\ \forall\ (y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{D}(J_B),$$

其中 $h:[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f^0:[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$. 现在，如果我们令 $f^0\equiv 1$、取 J_L 作为性能指标，并以 (2.2) 作为状态约束，我们就得到前述的时间最优控制问题.

2. 转换控制问题

考虑有限个状态方程 $(m\geq 2)$:

$$\dot{y}(t)=f(t,y(t),d),\quad t\in[0,T],\ d\in D\stackrel{\triangle}{=}\{1,2,\cdots,m\}. \tag{2.10}$$

每一个方程表示了系统的一种运行模式. 在每一个时刻，都有其中一个模式在运行，而人们可以在某一列时刻 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<T$ 使系统从某个运行模式转换到另一运行模式. 任何一次转换都需要一个正的转换费用. 为简单起见，我们只考虑无约束情形，而 (2.10) 的每个方程都是适定的，即：对任何 $d\in D$ 以及初始状态 $y(t_1)\in\mathbb{R}^n$，相应的方程在 $[t_1,t_2]$ 上有惟一的解. 记

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[0,T]\ \stackrel{\triangle}{=}\ \Big\{&\{\tau_i,d_i\}_{i\geq 0}\Big|d_i\in D,\ d_i\neq d_{i+1},\\ &0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots\leq T,\ \tau_i\uparrow T,\\ &\text{或对某个}i,\ \tau_i=T\Big\}.\end{aligned}$$

任何 $d(\cdot)\stackrel{\triangle}{=}\{\tau_i,d_i\}_{i\geq 0}$ 称为一个转换控制，它意味着在 $\tau_i(i\geq 1)$ 时刻, 人们将系统从模式 d_{i-1} 转换到 d_i. 对于这一控制问题，性能指标将取以下形式：

$$\begin{aligned}J_S(d(\cdot))\ =\ &h(y(T))+\sum_{i\geq 1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}f^0(t,y(t),d_{i-1})\mathrm{d}t\\ &+\sum_{i\geq 1}\theta(\tau_i,d_{i-1},d_i).\end{aligned} \tag{2.11}$$

上式右端的三项分别表示终端状态的费用、运行费用和转换费用，其中 $\theta:[0,T]\times D\times D\to[0,+\infty)$, 而 $\theta(\tau_i,d_{i-1},d_i)$ 是在 τ_i 时刻从模式 d_{i-1} 转换到模式 d_i 的费用. 通常，我们假设

$$\theta(t,d,\bar{d})>0,\qquad\forall\ t\in[0,T],\ d,\bar{d}\in D,\ d\neq\bar{d}.$$

所谓**最优转换控制问题**(简称 (S) 问题)是要寻找一个转换控制使它最小化性能指标 (2.11). 注意，一般说来，$\theta(t,d,\bar{d}) \neq \theta(t,\bar{d},d)$.

我们注意到转换费用的出现使得 (S) 问题与问题 (GC) 有了本质的不同.

一个有趣的特殊情形是下述所谓的**最优停止问题**. 取 $m=2$, $f(t,y,2) \equiv 0$，且 $\theta(t,2,1)$ 充分大. 这样，一旦一个最优转换控制将系统转换到模式 2，它就不会再转换到模式 1. 因此，在整个时间段内，我们至多有一次转换. 换言之，系统从模式 1 开始，运行到某个时刻 $\tau_1 \leq T$, 然后停止. 我们的问题是寻找最佳的时刻使之停止. 因此，我们称它为最优停止问题. 对于这一问题，性能指标可以写成:

$$\begin{aligned} J_S(\tau) &= h(y(\tau)) + \theta(\tau,1,2) + \int_0^\tau f^0(t,y(t),1)\,\mathrm{d}t \\ &\equiv \bar{h}(\tau,y(\tau)) + \int_0^\tau \bar{f}^0(t,y(t))\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

其中 $\bar{h}(t,y)=h(y)+\theta(t,1,2)$，$\bar{f}^0(t,y)=f^0(t,y,1)$. 自然，我们也可以考虑有状态约束的转换控制问题. 这样的问题必然会更复杂，我们希望读者能考虑如何恰当地提出这种问题.

3. 脉冲控制

在前面的讨论中，状态轨线 $y(\cdot)$ 是连续的. 下面的问题将允许 $y(\cdot)$ 不连续. 考虑以下 (积分形式的) 状态方程:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))\,\mathrm{d}s + \xi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2.12}$$

其中 $\xi(\cdot)$ 是分段常值函数:

$$\xi(t) = \sum_{j\geq 1} \xi_j \chi_{[\sigma_j,+\infty)}(t), \qquad t \in [0,T].$$

在 (2.12) 的右端加上 $\xi(\cdot)$ 后，使得在每个时刻 σ_j，状态有一个量为 ξ_j 的跳跃. 这样的跳跃称为一个**脉冲**，而 $\xi(\cdot)$ 就称为一个脉冲控制. 通常，对于脉冲控制有一些约束. 典型的约束形式是

$$\xi(t) \in K, \qquad \forall\, t \in [0, T],$$

其中 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个锥. 在每个时刻 σ_j，一旦有跳跃，与之相对应就会有一个正的**脉冲费用**. 为简单起见，我们再一次只考虑无约束情形，性能指标具有以下形式：

$$J_I(\xi(\cdot)) = h(y(T)) + \int_0^T f^0(t, y(t))\, \mathrm{d}t + \sum_{j \geq 1} \psi(\sigma_j, \xi_j). \qquad (2.13)$$

上式右端三项分别表示终端状态费用、运行费用和脉冲费用，其中 $\psi : [0, T] \times K \to (0, +\infty)$，而 $\psi(\sigma_j, \xi_j)$ 是在时刻 σ_j 由脉冲 ξ_j 引起的费用. 这里

$$\psi(t, \xi) > 0, \qquad \forall\, t \in [0, T],\ \xi \in K.$$

所谓**最优脉冲控制问题**(简称 (I) 问题) 就是寻找一个脉冲控制使之最小化性能指标 (2.13).

同样，由于脉冲控制和脉冲费用的出现，(I) 问题与问题 (GC) 是非常不同的.

4. 最小最大问题

在上面的讨论中，除了点状状态约束 (2.5) 以外，我们对 $[0, T]$ 上的状态 $y(\cdot)$ 的评估是在一种“平均”意义下进行. 也就是说，在性能指标中，只是出现了 $[0, T]$ 上关于状态的积分型的项. 但有时候，人们需要状态 $y(\cdot)$ 与某个函数在每个时刻 $t \in [0, T]$ 都能尽可能接近. 对此，我们可以设计一个指标泛函，使之包含以下类型的项：

$$\max_{t \in [0,T]} |y(t) - z(t)|,$$

其中 $z(\cdot)$ 是所期望的状态轨迹. 一般地，我们可以引入以下形式的性能指标：

$$J(y(\cdot),u(\cdot)) = \operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]} h(t,y(t),u(t)), \quad \forall\ (y(\cdot),u(\cdot)) \in \mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T], \tag{2.14}$$

其中 $h:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$. 这样，我们的问题就是寻找一对 $(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{F,\Gamma}[0,T]$ 使之最小化一个具有最大值形式的性能指标. 因此，我们称之为最小最大问题 (简称 (MM) 问题). 由于性能指标 (2.14) 的性质要差于 J_M, J_L 和 J_B，因此，这是一个比较难于研究的问题.

5. 两人零和微分对策

如果影响 (微分方程描述的) 控制系统还有一个我们的对手, 这个对手的目的是最大化我们的性能指标, 我们的目的则是最小化这个性能指标. 则相应的问题称为**两人零和微分对策**.

例如, 在实际生活中，干扰处处存在. 同样，一些计算误差、模型近似等等，也都是不可避免的. 这一切都可以笼统地看作控制系统 (或性能指标) 的不确定性. 为了最优化我们的性能指标，我们需要寻找一个能照顾到所有这些不确定性的控制. 两人零和微分对策就是处理这类问题的一个方法. 在这个框架下，我们把所有不确定性看作一个试图最大化我们的性能指标的对手. 当然, 这只是一种简单化的做法. 我们并不排除不确定性在某些情形下有着正面作用.

下面, 我们来介绍两人零和微分对策问题.

考虑以下状态方程：

$$\dot y(t) = f(t,y(t),u(t),v(t)), \qquad t\in[0,T], \tag{2.15}$$

其中 $y(\cdot)$ 是状态，$u(\cdot)$ 是原来的控制，取值于度量空间 U，$v(\cdot)$ 表

示不确定性，它取值于另一个度量空间 V，$f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times V\to\mathbb{R}^n$ 是一个给定的映射. 我们可以看到 (2.15) 与 (2.1) 的区别就在于在 (2.15) 中有一个不确定性 $v(\cdot)$. 令

$$\mathscr{V}[0,T]\triangleq\{v:[0,T]\to V|\ v(\cdot)\ \text{可测}\}.$$

这可以看作我们的对手的控制集. 为简单起见，我们在这里仅考虑无约束情形，而且状态方程 (2.15) 是适定的：对任何 $y_0\in\mathbb{R}^n$, $(u(\cdot),v(\cdot))\in\mathscr{U}[0,T]\times\mathscr{V}[0,T]$, 存在惟一解 $y(\cdot)\equiv y(\cdot\,;y_0,u(\cdot),v(\cdot))$. 同样，为了明确起见，我们考虑 Bolza 型的性能指标：

$$J(y_0,u(\cdot),v(\cdot))=h(y(T))+\int_0^T f^0(t,y(t),u(t),v(t))\,\mathrm{d}t,$$
$$\forall\ (y_0,u(\cdot),v(\cdot))\in\mathbb{R}^n\times\mathscr{U}[0,T]\times\mathscr{V}[0,T].$$

我们期望最小化性能指标，而对手期望最大化性能指标. 这就称为两人零和微分对策. 当状态方程为线性、指标为二次泛函且 $U=\mathbb{R}^m$、V 为一闭球时，上述问题称为 H^∞– **问题**.

我们提请读者注意前面介绍的问题可以混合起来得到许多不同的问题. 例如，可以考虑一个控制问题，它含有通常的控制 (有时候称为连续控制或正则控制)、转换控制和脉冲控制；同样，也可以考虑同时具有最大值型泛函和不确定性的控制问题, 等等.

§3. 历史回顾

下面，我们简短地回顾一下最优控制理论的历史. 以下材料基于雍炯敏 – 周迅宇的专著 [51].

尽管**最优控制理论**出现于二十世纪五十年代，但本质上属于这一类的问题很早就出现了; 这甚至可以追溯到古人发现两点之间以直线段为最短的时代.

诞生于十七世纪初的**变分学**是最优控制理论普遍为人们接受的一个前身．以下是关于变分学的一段简史．它也将为下一章的内容提供一定的背景材料．1662 年，Pierre de Fermat(1601–1665) 在他的文章中利用最小化光线通过两种不同媒介的时间，得到现在称为 **Fermat 最短时间原理**的结果．按 H. Goldstine [26], 这很可能是变分学诞生的标志 (尽管在 Fermat 的时代，不曾有变分学一词)．1685 年，Isaac Newton (1643—1727) 研究了刻画最小阻尼的旋转刚体问题．更让人感兴趣的是在 1696 年 6 月，Johann Bernoulli (1667—1748) 以求解著名的**捷线问题**挑战当时的数学界．捷线问题最早是由 Galilei Galileo (1564—1642) 提出的，但给出的解答是错误的．该问题的解在 1697 年，由 Johann Bernoulli、其兄 Jacob Bernoulli (1654—1705)、Gottfried W. Leibniz (1646—1716)、Newton、Marquis de l'Hôspital (1661—1704) 以及 Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651—1708) 各自独立解决．1744 年，Leonard Euler (1707—1783) 得到了临界点的一阶必要条件 — 现在称为 **Euler 方程**(或 **Euler–Lagrange 方程**)．1755 年，Joseph L. Lagrange (1736—1813) 引入了所谓的 **δ- 变分**, 开创了该领域的新纪元. 1756 年，当 Euler 得知 Lagrange 的工作后，为该学科打造了**变分学**一词. 1786 年，Adrien-Marie Legendre (1752—1833) 引入二阶变分以研究临界点成为最大值点或最小值点的充分条件．但他的文章有一个严重的缺陷．这一缺陷后来由 Karl G. J. Jacobi (1804—1851) 于 1838 年填补, 形成了所谓的 **Legendre–Jacobi 理论**. 1833 年，William R. Hamilton (1805—1865) 引入了 **Hamilton 最小作用量原理**(一个比较模糊的描述是 Pierrie L. M. Maupertuis (1698—1759) 在 1744 给出的)．1834—1835 年间，Hamilton 建立了与 Euler–Lagrange 方程等价的一个常微分方程系统 (现在称为 **Hamilton 正则方程组**)．同时，他还得到了 **Hamilton–Jacobi 方程**，该方程由 Jacobi 在 1838 年作了改进．其后, 许多科学家在这一领域作出了广泛的贡献．其中主要的有 Karl K.

Weierstrass (1815—1897), Ludwig Scheeffer, Rudolff F. A. Clebsch (1833—1872), Adolph Mayer (1839—1907), Oskar Bolza (1857—1942), Adolph Kneser (1862—1930), David Hilbert (1862—1943), Gilbert A. Bliss (1876—1951), Hans Hahn (1879—1934), 和 Constantin Carathéodory (1873—1950). 一般认为，至二十世纪中叶，所谓**变分学的经典理论**已经完成. 关于变分学的更为详细的综述以及历史可参见 H. H. Goldstine [26], Giaquinta-Hildebrandt [25], Stampacchia [44], McShane [39] 以及 Pesch-Bulirsch [41]. 值得注意的是 1900 年国际数学家大会上 Hilbert 提出的著名的 23 问题中，第 23 问题是关于变分学的，而第 19 和第 20 问题与这一学科紧密相关.

根据 Bellman-Kalaba [11], (数学的) 控制理论很可能应该追溯到 James C. Maxwell (1831—1879) 1868 年的工作和 J. Vyshnegradskii 在 1876 年的工作. 其他对这一学科有重要影响的学者有 Adolf Hurwitz (1859—1919), Henri H. Poincaré (1854—1912), Aleksandr M. Liapounoff [Lyapunov] (1857—1918), H. Nyquist, Norbert Wiener (1894—1964), 和 Andrey N. Kolmogorov (1903—1987).

现代最优控制理论始于二战结束. 主要的出发点可能是在美国和苏联的一些科学家 (由于众所周知的原因) 所研究的 (**微分**)**对策**. 一群在兰德公司工作的科学家，包括 R. Bellman, J. P. LaSalle, D. Blackwell, R. Isaacs, W. H. Fleming 和 L. D. Berkovitz, 在 40 年代晚期和 50 年代早期广泛地研究了微分对策及其相关问题. 这一研究为 Bellman**动态规划原理**的诞生提供了一个良好的环境. 这一原理首次正式发表于 1953 年 (尽管 Bellman (1920—1984) 声称在两年之前已得到该原理，见 Bellman [9], 第 115 页). 另一方面，根据 L. S. Pontryagin (1908—1988) [42]，他们的学派，在 Steklov 数学研究所领导的持续要求下，在 1952 年秋开始了**最优控制过程**的研究，其标志是在 Steklov 数学研究所举办的一个定期的研

讨会，参加者还有 V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, 和 E. F. Mishchenko. 在众多的工程问题中，他们选出了三类问题: 常微分方程的奇异摄动，微分追击和躲避对策，以及最优控制理论. 基于他们广泛的研究，1956 年，他们宣布了 **Pontryagin 最大值原理**. 另一方面，R. E. Kalman [29] 在 50 年代后期建立了具有二次性能指标的线性系统 (简称 LQ 问题) 理论. 在莫斯科举行的第一届 IFAC 会议 (International Federation of Automatic Control) 上，Bellman、Pontryagin 和 Kalman 各自报告了动态规划方法、最大值原理和 LQ 理论[1]，正式宣告了现代最优控制理论登上历史舞台.

习题

1. 设 $J:G\to \mathbf{R}$ 是一个连续函数.
   (i) 设 $G=[a,b]$. 证明 $J(\cdot)$ 在 G 上有最小值.
   (ii) 当 $G=(a,b)$ 时，给出一个例子使 $J(\cdot)$ 没有最小值. 对于 $G=(a,b)$ 这一情形，能否给出一个条件保证 $J(\cdot)$ 具有最小值.
   (iii) 设 $J(\cdot)$ 是 C^1 函数. 举例说明 (1.3) 在 $J(\cdot)$ 的最小值点不成立.
   (iv) 设 $J(\cdot)$ 是 C^1 函数，$G=[0,1]\cup[2,3]$. 又设 $\bar{x}$ 是 $J(\cdot)$ 的一个最小值点，给出 $\bar{x}$ 满足的必要条件.
2. 讨论区域 $\Omega\subseteq \mathbf{R}^n$ 内的 C^2 函数 $J:\Omega\to\mathbf{R}$ 的极小值点满足的一阶、二阶必要条件和充分条件.
3. 试给出型为 (1.5) 的例，使得相应的 $\lambda\neq 0$.
4. (i) 构造一个 LQ 问题使得，$\mathscr{U}[0,T]\neq\mathscr{U}_{ad}[0,T]$.
   (ii) 在什么条件下，等式成立?
5. 构造三个型为 (2.2) 但不同于第二节中例子的状态和控制约束的例子.
6. 构造三个最优控制问题，使得它是第二节中所列问题的一些不同组合.
7. 考虑系统
$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}=u(t),\qquad |u(t)|\le 1.$$

[1] 这些工作现在被认为是最优控制理论的三个里程碑，见 Fleming [22].

(i) 将上述系统写成 (2.1) 的形式.

(ii) 求将系统从状态 $(y(t), \dot{y}(t), \cdots, y^{n-1}(t))|_{t=0} = (0, 0, \cdots, 0)$ 最快地移到 $(h, 0, \cdots, 0)$ 的时间最优控制.

第二章 准备知识

§1. 凸集

我们假定读者具有线性代数的基本知识.

定义 1.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 我们称 E 是

(i) **开的**, 如果对任何 $x \in E$, 存在 $\delta > 0$, 使得**开球**

$$B_\delta(x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < \delta\} \subseteq E.$$

(ii) **闭的**, 如果 E 的**补集** $E^c \triangleq \mathbb{R}^n \setminus E$ 是开的[1].

(iii) **紧的**, 如果它既是有界的又是闭的[2].

(iv) **凸的**, 如果

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in E, \quad \forall\, x_1, x_2 \in E,\ \alpha \in [0,1].$$

对任何 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 称包含 E 的最小闭集为 E 的**闭包**, 记作 $\overline{E}$; 称 E 包含的最大开集为 E 的**内部**(或**开核**), 记作 $\overset{\circ}{E}$.

命题 1.2. (i) 设 $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸的, 则对任何 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, 集合

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 \triangleq \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 | x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$$

[1]等价地, E 是闭的, 如果对任何收敛于 x 的点列 $x_k \in E$, 有 $x \in E$.

[2]这一定义仅在有限维空间 (例如在 $\mathbb{R}^n$ 中) 时是正确的. 一般的定义应该是:E 的任何开覆盖都有有限子覆盖.

也是凸的. 进一步, 如果 E_1, E_2 都是闭的, 而其中之一是有界的, 则 $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$ 是凸闭的.

(ii) 设 $\{E_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 中凸集组成的集族, 则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ 也是凸的.

上述命题的证明留给读者自行完成. 我们指出对于凸集 E_1 和 E_2, 由命题 1.2(i), 集合 $E_1 \pm E_2$、$\alpha_1 E_1$、$E_1 + \{x\}$ 和 $-E_1$ 等都是凸的. 但是集合 $E_1 \bigcup E_2$ 和 $E_1 \setminus E_2$ 都未必是凸的.

定义 1.3. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 称包含 E 的最小的凸(闭)集为 E 的 **凸(闭)包**, 记为 $(\overline{\operatorname{co}} E) \operatorname{co} E$.

命题 1.4. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则

$$\operatorname{co} E = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \,\middle|\, x_i \in E, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, k \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.1}$$

证明. 记 (1.1) 的右端为 G. 易见 G 是凸的且包含 E, 从而 $\operatorname{co} E \subseteq G$. 另一方面, 如果 F 是一个包含 E 的凸集, 则它一定包含 G. 这就是说 G 是包含 E 的最小的凸集, 即为 $\operatorname{co} E$. 这就证明了命题. □

如果有 $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, k \in \mathbb{N}$ 使得 $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, 则 x 称为 $x_1, \cdots, x_k$ 的一个**凸组合**.

以下结果是由 Carathéodory 首先得到的, 它给出了集合 $\operatorname{co} E$ 更精细的描述. 它表明, 为了描述 $\operatorname{co} E$, 在命题 1.4 中 k 的取值只要达到 $n+1$ 就足够了.

定理 1.5. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \operatorname{co} E$, 则存在 $x_i \in E$ 以及 $\alpha_i \geq 0$ $(0 \leq i \leq n)$ 使得

$$x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i, \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1.$$

证明. 由命题 1.4, 对任何 $x \in \operatorname{co} E$, 存在 $x_i \in E$ 以及 $\alpha_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq k)$ 使得

$$x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i, \qquad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1.$$

如果 $k \leq n$, 则已经得到结果. 现设 $k > n$. 我们可以假设对任何 $i = 0, \cdots, k$, 有 $\alpha_i > 0$. 由于 $\mathbb{R}^n$ 中 k 个向量 $x_0 - x_k, x_1 - x_k, \cdots, x_{k-1} - x_k$ 必定是线性相关的，我们可以找到不全为零的 $\beta_0, \cdots, \beta_{k-1} \in \mathbb{R}$ 使得

$$\sum_{i=0}^{k-1} \beta_i (x_i - x_k) = 0.$$

令 $\beta_k = -\sum_{i=0}^{k-1} \beta_i$, 则

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \beta_i = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \beta_i x_i = \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i x_i - \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i x_k = 0. \end{cases}$$

进一步，不妨假设 $\dfrac{|\beta_k|}{\alpha_k}$ 是 $\dfrac{|\beta_i|}{\alpha_i}$ $(1 \leq i \leq k)$ 中得最大者, 即

$$\frac{|\beta_i|}{\alpha_i} \leq \frac{|\beta_k|}{\alpha_k}, \qquad \forall\, i = 0, \cdots, k-1.$$

因为 β_i $(i=0,\cdots,k)$ 不全为零，我们有 $\beta_k \neq 0$ 以及

$$\tilde{\alpha}_i \triangleq \alpha_i - \frac{\beta_i \alpha_k}{\beta_k} \geq 0, \qquad 0 \leq i \leq k-1.$$

而且

$$\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\alpha}_i = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i - \Big(\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i\Big) \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i + \beta_k \frac{\alpha_k}{\beta_k} = 1.$$

而

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x_i + \alpha_k x_k = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x_i - \frac{\alpha_k}{\beta_k}(-\beta_k x_k) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x_i - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i x_i = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\alpha}_i x_i. \end{aligned}$$

这就是说，x 可以表示为 E 中 k 个点的凸组合. 于是，定理结论由归纳法可得. □

以下是上述定理的一个有趣的应用.

命题 1.6. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧集, 则 $\operatorname{co} E$ 是凸紧集.

证明. 由于 E 有界，因而有常数 $M > 0$ 使得

$$|x| \leq M, \qquad \forall\, x \in E.$$

从而，由命题 1.4 可得 $\operatorname{co} E$ 是有界集.

下面，我们来证明 $\operatorname{co} E$ 是闭的. 设 $x^m \in \operatorname{co} E$, $\lim_{m\to\infty} x^m = x$. 我们要证 $x \in \operatorname{co} E$. 由定理 1.5, 我们有以下表示:

$$x^m = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^m x_i^m, \qquad m \geq 1,$$

其中

$$\alpha_i^m \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^m = 1, \quad x_i^m \in E.$$

由于 $\{\alpha_i^m\}$ 和 $\{x_i^m\}$ 都是有界的，我们可以假设

$$\alpha_i^m \to \alpha_i, \quad x_i^m \to x_i, \qquad \text{当 } m \to \infty, \quad i = 0, \cdots, n.$$

显然，

$$\alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1, \quad x_i \in E.$$

进一步，

$$x = \lim_{m\to\infty} x^m = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^m x_i^m = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \in \operatorname{co} E.$$

这就证明了 $\operatorname{co} E$ 是闭的, 从而命题得证. □

需要注意的是，在证明 $\operatorname{co} E$ 的闭性时，仅有命题 1.4 是不够的. 请读者考虑为什么.

命题 1.7. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空凸闭集, 则对任何 $x \in \mathbb{R}^n$, 有惟一的 $\bar{x} \in E$ 使得

$$|x - \bar{x}| = d(x, E) \stackrel{\triangle}{=} \inf_{y \in E} |x - y|. \tag{1.2}$$

进一步, $\bar{x}$ 可由以下变分不等式刻画:

$$\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0, \qquad \forall\, y \in E. \tag{1.3}$$

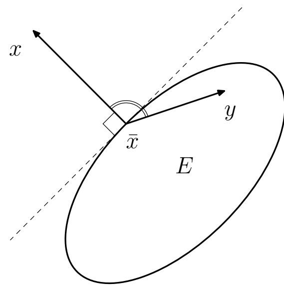


图 2.1

证明. 首先，我们来证明 $\bar{x}$ 的存在性. 记

$$d \triangleq \inf_{y\in E} |x-y| \equiv d(x,E) \geq 0,$$

则有一列 $x_k \in E$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - x| = d. \tag{1.4}$$

由平行四边形法则

$$\begin{aligned} & |x_j - x_k|^2 \\ = \ & 2|x-x_j|^2 + 2|x-x_k|^2 - |2x-(x_j+x_k)|^2 \\ = \ & 2|x-x_j|^2 + 2|x-x_k|^2 - 4\left|x - \frac{x_j+x_k}{2}\right|^2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

由于 E 是凸集，从而 $\dfrac{x_j+x_k}{2} \in E$. 于是

$$|x_j - x_k|^2 \leq 2|x-x_j|^2 + 2|x-x_k|^2 - 4d^2. \tag{1.6}$$

这样，我们看到 $\{x_k\}$ 事实上是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 Cauchy 序列. 由 E 的闭性，我们有

$$x_k \to \bar{x} \in E.$$

由 (1.4) 立即可得 (1.2) 成立. 这样我们就证明了 $\bar{x}$ 的存在性.

我们指出，惟一性事实上已包含在上面的证明中. 假使还有另一个 $\bar{y} \in E$ 满足

$$|x - \bar{y}| = d,$$

则在 (1.6) 中取 $x_k = \bar{x}, x_j = \bar{y}$ 得 $|\bar{x} - \bar{y}|^2 \le 0$. 惟一性得证.

最后，对任何 $y \in E$ 以及 $\alpha \in (0,1)$, 我们有

$$\bar{x} + \alpha(y - \bar{x}) = \alpha y + (1-\alpha)\bar{x} \in E.$$

从而

$$\begin{aligned} |x - \bar{x}|^2 &= d^2 \le |x - \bar{x} - \alpha(y - \bar{x})|^2 \\ &= |x - \bar{x}|^2 - 2\alpha\langle x - \bar{x}, y - \bar{x}\rangle + \alpha^2 |y - \bar{x}|^2. \end{aligned}$$

即

$$2\langle x - \bar{x}, y - \bar{x}\rangle \le \alpha |y - \bar{x}|^2.$$

令 $\alpha \to 0^+$, 我们就得到 (1.3). 反过来，如果 (1.3) 成立, 则对任何 $y \in E$,

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= |x - \bar{x} - (y - \bar{x})|^2 \\ &= |x - \bar{x}|^2 - 2\langle x - \bar{x}, y - \bar{x}\rangle + |y - \bar{x}|^2 \\ &\ge |x - \bar{x}|^2. \end{aligned}$$

从而 (1.2) 成立. □

定理 1.8. 设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 是两个互不相交的非空凸闭集, E_1 有界, 则存在 $c \in \mathbb{R}$ 以及 $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $|\lambda| = 1$ 满足

$$\langle \lambda, x_1 \rangle < c < \langle \lambda, x_2 \rangle, \qquad \forall\, x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2. \tag{1.7}$$

上式说明超平面 $\langle \lambda, x \rangle = c$ 严格分离开了集合 E_1 和 E_2.

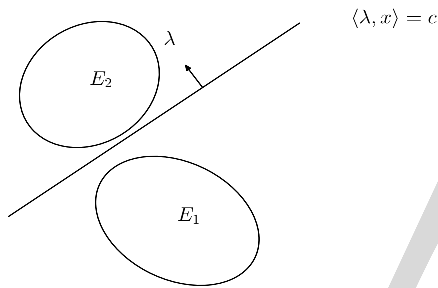


图 2.2

证明. 首先我们假设 $E_1 = \{0\}$. 此时，由于 $0 \notin E_2$ 而 E_2 是凸闭的，由命题 1.7, 存在惟一的 $\bar{x} \in E_2$ 使得

$$0 < |\bar{x}| = \inf_{x_2 \in E_2} |x_2|.$$

置

$$\lambda = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}, \quad c = \frac{|\bar{x}|}{2} > 0,$$

则 $|\lambda| = 1$. 而由 (1.3), 我们有

$$\langle\lambda, x_2 - \bar{x}\rangle = -\frac{1}{|\bar{x}|}\langle 0 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}\rangle \geq 0, \qquad \forall\, x_2 \in E_2.$$

从而

$$\langle\lambda, x_2\rangle \geq \langle\lambda, \bar{x}\rangle > c, \qquad \forall\, x_2 \in E_2.$$

因此,

$$\langle\lambda, 0\rangle < c < \langle\lambda, x_2\rangle, \qquad \forall\, x_2 \in E_2.$$

这样，我们就对 $E_1 = \{0\}$ 的情形证明了结果.

对一般的情形，置 $E = E_2 - E_1$, 则由命题 1.2, E 是凸闭的. 由于 E_1 和 E_2 不相交，我们有 $0 \notin E$. 由前面所证明的结果，存在 $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $|\lambda| = 1$ 以及 $c_1 \in \mathbb{R}$ 使得

$$0 = \langle\lambda, 0\rangle < c_1 < \langle\lambda, x\rangle, \qquad \forall\, x \in E.$$

从而

$$\langle \lambda, x_2 \rangle > c_1 + \langle \lambda, x_1 \rangle, \quad \forall\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2.$$

于是令

$$c \equiv \frac{c_1}{2} + \sup_{x_1 \in E_1} \langle \lambda, x_1 \rangle,$$

即得 (1.7). □

§2. Lebesgue 积分

可测集

首先，我们来回顾 Lebesgue 可测集和 Borel 集的概念. 记 $2^{\mathbb{R}^n}$ 为由 $\mathbb{R}^n$ 中所有子集构成的集族.

定义 2.1. 称 $\mathscr{F} \subseteq 2^{\mathbb{R}^n}$ 是一个 **σ- 域**, 如果

(i) $\forall\ E_i \in \mathscr{F},\ i = 1, 2, \cdots,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{F}$;

(ii) $\forall E_1, E_2 \in \mathscr{F},\ E_1 \setminus E_2 \in \mathscr{F}$;

(iii) $\mathbb{R}^n \in \mathscr{F}$.

对任何 $\mathscr{G} \subseteq 2^{\mathbb{R}^n}$, 包含 $\mathscr{G}$ 的最小的 σ- 域称为由 $\mathscr{G}$ 生成的 σ- 域，记为 $\sigma(\mathscr{G})$. 由 $\mathbb{R}^n$ 中开集的全体 $\mathcal{O}$ 生成的 σ- 域称为 $\mathbb{R}^n$ 的 **Borel σ- 域**，记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ (简记为 $\mathscr{B}$). 可以证明 $\mathscr{B}$ 也是由 $\mathbb{R}^n$ 中闭集的全体生成的 σ- 域. $\mathscr{B}$ 中的元素称为 **Borel 集**.

对于 $\mathbb{R}^n$ 中以 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为中心、边长为 $2\delta > 0$ 的方体 $Q_\delta(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \delta, x_i + \delta)$. 定义

$$m(Q_\delta(x)) = (2\delta)^n. \tag{2.1}$$

一般地，对任何 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 定义

$$m(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i)\Big|\ E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i,\ Q_i \text{ 为方体}\}, \tag{2.2}$$

可以证明当 E 是方体时，上述定义不会和 (2.1) 矛盾．置

$$\mathscr{N} = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \Big| m(E) = 0\}.$$

称 $\mathscr{N}$ 中的元素为**零测度集**．易见零测度集的子集仍是零测度集．记 $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathscr{B} \bigcup \mathscr{N})$ 为由 $\mathscr{B} \bigcup \mathscr{N}$ 生成的 σ- 域．$\mathscr{L}$ 中的元素称为 **Lebesgue 可测集**(有时简称为可测集)．值得注意, $\mathscr{L} \neq 2^{\mathbb{R}^n}$, 即 $\mathbb{R}^n$ 中存在 Lebesgue 不可测集．事实上, 我们有如下结果:

定理 2.2. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则以下条件等价:

(i) E 是 Lebesgue 可测集;

(ii) 存在一个 Borel 集 $B \in \mathscr{B}$ 和零测度集 $N \in \mathscr{N}$, 使得

$$E = B \bigcup N;$$

(iii) 对任何 $\widetilde{E} \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$m(\widetilde{E}) = m(\widetilde{E} \bigcap E) + m(\widetilde{E} \setminus E);$$

(iv) 当 E 是有界集时,

$$\sup\{m(\widetilde{E})\Big|\ \widetilde{E} \subseteq E \text{ 为闭集}\} = \inf\{m(G)\Big|\ G \supseteq E \text{ 为开集}\}.$$

进一步, 关于 m, 我们还有

定理 2.3. (i) $m(\phi)=0$;

(ii) $m(E)\geq 0,\ \forall\ E\in\mathscr{L}$;

(iii) $m\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\Big)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(E_i),\ \ \forall\ E_i\in\mathscr{L},E_i\bigcap E_j=\phi,\ i\neq j.$

今后，我们称 m 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 **Lebesgue 测度**，称 $m(E)$ 为 $E\in\mathscr{L}$ 的 Lebesgue 测度. 以后, 我们也常用 $|E|$ 来表示 $m(E)$. 在上面的定理中, (iii) 称为 m 的可列可加性. 尽管按照 (2.2), $m(\cdot)$ 对所有的 $E\in 2^{\mathbb{R}^n}$ 有定义, 但可列可加性一般仅对 $\mathscr{L}$ 中的集合才成立.

可测函数

现在，我们来考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的函数.

定义 2.4. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 可测.

(i) 函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 称为**简单函数**, 如果存在 $E_i\in\mathscr{L}$, $E_i\subseteq E$ $(1\leq i\leq k)$, 使得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\chi_{E_i}(x),\qquad x\in E,$$

其中 $\alpha_i\in\mathbb{R}$, 而 $\chi_{E_i}(\cdot)$ 是 E_i 的**特征函数**:

$$\chi_{E_i}(x)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x\in E_i,\\ 0, & \text{如果 } x\notin E_i.\end{cases}$$

(ii) 函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 称为 (Lebesgue) **可测函数**，如果对任何 $c\in\mathbb{R}$

$$\{f\geq c\}\overset{\triangle}{=}f^{-1}[\,c,+\infty)=\{x\in E\big|f(x)\geq c\}$$

是Lebesgue可测集.

(iii) 函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 称为 **Borel 可测函数**, 如果对任何 $c \in \mathbb{R}$, $\{f \geq c\}$ 是 Borel 集.

可以证明在上述定义的 (ii) 和 (iii) 中, $\{f \geq c\}$ 可以换成 $\{f > c\}$, $\{f \leq c\}$ 或 $\{f < c\}$. 进一步，我们可以证明 f 可测当且仅当对任何 $B \in \mathscr{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{L}$. [3]

命题 2.5. 可测函数具有如下基本性质:

(i) 如果 f, g 可测，则 $f + \alpha g$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$, f/g(如果对任何 x, $g(x) \neq 0$), $\min\{f, g\}$,$\max\{f, g\}$, 以及 $|f|$ 都是可测的.

(ii) 如果 f_k 可测，则 $\varliminf_{k\to\infty} f_k$, $\varlimsup_{k\to\infty} f_k$, $\inf_k f_k$ 以及 $\sup_k f_k$ 均可测.

(iii) f 可测当且仅当存在一列简单函数列 f_k, 使得在除掉一个零测度集外, 点点收敛于 f, 特别，任何简单函数是可测的.

可测函数还有以下重要的性质:

定理 2.6. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为有界可测集, f_k 是 E 上的可测函数列，几乎处处收敛于 f[4], 则

(i) f_k 一定按测度收敛于 f. [5]

(ii) (**Egorov**) 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $E_\varepsilon \subseteq E$, 使得 $m(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$, 而 f_k 在 E_ε 上一致收敛于 f.

[3]由此，f 可测当且仅当对任何开集 $O \in \mathcal{O}$, $f^{-1}(O) \in \mathscr{L}$, 即开集的逆是可测集. 而根据拓扑学的观点，$f$ 连续当且仅当对任何开集 $O \in \mathcal{O}$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}$. 这是一个有意义的比较.

[4]如果除去 E 的一个零测度的子集 E_0，某种性质 P 在 $E \setminus E_0$ 成立，我们就称 P 在 E 上几乎处处成立，记为 P a.e. E. 这样 $f_k \to f$, a.e. E, 即 f_k 在 E 上几乎处处收敛于 f 是指存在零测度集 $E_0 \subseteq E$, 使得 $f_k(x) \to f(x)$, $\forall\, x \in E \setminus E_0$.

[5]即对任何 $\varepsilon > 0$, $\lim_{k\to\infty} m\{x \in E \,\big|\, |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0$.

定理 2.7. (**Riesz**) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集. f_k 是 E 上的可测函数列, 按测度收敛于 f, 则存在 f_k 的子列 $\{f_{k_j}\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f.

定理 2.8. (**Luzin**) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $f: E \to \mathbb{R}$ 可测, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $E_\varepsilon \subseteq E$, 使得 $m(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$, 而 f 限制在 E_ε 上是连续的[6].

一般说来，可测函数的复合函数不一定是可测的. 以下例子基于一维不可测集的存在性.

例 2.1. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 不可测集. 定义 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x = y \in E, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则易见 f 是 $\mathbb{R}^2$ 中零测度集 $\{(x,y) | x = y \in E\}$ 上的特征函数, 从而它是可测的. 取对 $x \in \mathbb{R}$, 令 $g(x) = x$, 则 $g(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数 (事实上还是连续函数). 令 $F(x) \equiv f(x, g(x))$, 则易见 $F(\cdot)$ 不是可测函数.

对于可测函数，复合函数的可测性是一个比较复杂的问题. 这里我们只给出两个结果. 对这一问题的更一般的结果，需要用到 Souslin 空间的有关知识.

定理 2.9. 设有函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 满足: 对任何 $y \in \mathbb{R}^m$, $f(\cdot, y)$ 是可测的, 而对任何 $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, \cdot)$ 是连续的[7], 则对任何

[6]当 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一般的集合时，我们称函数 f 在 E 上连续，是指：$\forall\, x_0 \in E$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 且 $x \in E$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 等价地，对 $\mathbf{R}^n$ 中任何开集 U，$f^{-1}(U) = \{x \in E \,\big|\, f(x) \in U\}$ 是 E 的 (相对) 开集.

[7]通常称这样的函数为 Carathéodory 函数.

(向量值[8]) 可测函数 $\xi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 复合函数 $x\mapsto f(x,\xi(x))$ 是可测的.

证明. 取 $\mathbb{R}^m$ 中的一个稠密子集 $\{y_1,y_2,\cdots\}$. 对于 $i,j\geq 1$, 定义

$$E_{ij}\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n\Big|\ |\xi(x)-y_j|<\frac{1}{i}\},\qquad F_{ij}\triangleq E_{ij}\setminus\bigcup_{k=1}^{j-1}E_{ik}.$$

从而对固定的 i, F_{ij} 可测，两两不交, 且 $\mathbb{R}^n=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_{ij}$. 于是可定义

$$\xi_i(x)=y_j,\quad x\in F_{ij},\ j=1,2,\cdots.$$

易见 $\xi_i(\cdot)$ 可测，且 $\xi_i(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上点点收敛于 $\xi(\cdot)$. 注意到 $x\mapsto f(x,\xi_i(x))$ 可测, 而 $f(x,\xi(x))=\lim_{i\to\infty}f(x,\xi_i(x))$. 于是由定理 2.5 即得结论. □

定理 2.10. 设 $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 是 Borel 可测函数. $\xi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 可测, 则复合函数 $x\mapsto f(x,\xi(x))$ 是可测的.

这个定理的证明留给读者自行完成.

Lebesgue 积分

在本书, 如果没有特别说明, 我们用到的积分都将是 Lebesgue 积分. 下面我们回顾一下 Lebesgue 积分的基本性质.

命题 2.11. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 可测. $f:E\to\mathbb{R}$ 可测, 则

(i) 若 $m(E)<+\infty$, $f:E\to\mathbb{R}$ 有界, 则 f 可积.

[8]向量值函数及其可测定性的定义见下一节.

(ii) f 可积当且仅当 $|f|$ 可积. 进一步有

$$\Big|\int_E f(x)\ \mathrm{d}x\Big| \le \int_E |f(x)|\ \mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

命题 2.12. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 可测, 且 $f, g : E \to \mathbb{R}$ 可积, 则

(i) 对任何 $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + \alpha g$ 可积.

(ii) $f \vee g \equiv \max(f, g)$ 以及 $f \wedge g \equiv \min(f, g)$ 可积.

(iii) 如果 $E_1, E_2 \in \mathscr{L}$, 且 $E_1 \bigcap E_2 = \phi, E_1 \bigcup E_2 = E$, 则 f 在 E_1, E_2 上均可积, 且

$$\int_E f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{E_1} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

(iv) 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在简单函数 φ 使得

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)|\ \mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{2.4}$$

(v) 如果 E 是一个区域, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在分块常值函数 φ 使得 (2.4) 成立.

(vi) 如果 E 是一个区域, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 E 上的 C^∞ 函数 φ 使得 (2.4) 成立.

(vii) (**绝对连续性**) 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任何 $e \in \mathscr{L}$, $e \subseteq E$, 若 $m(e) < \delta$, 便有

$$\int_e |f(x)|\ \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

下面是 Lebesgue 积分理论中三个非常重要的定理.

定理 2.13. (**Lebesgue 控制收敛定理**) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 可测，$f_k, g : E \to \mathbb{R}$ 可积 $(k \geq 1)$，满足

$$\begin{cases} |f_k(x)| \leq g(x), & \text{a.e. } E, \ \forall\, k \geq 1, \\ \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), & \text{a.e. } E, \end{cases} \tag{2.5}$$

则 f 可积，且

$$\int_E f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\ \mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

定理 2.14. (**Lévy 单调收敛定理**) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 可测，$f_k : E \to \mathbb{R}$ 可积，且关于 k 单调增加：

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x), \qquad \text{a.e. } k \geq 1,$$

则

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\ \mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\ \mathrm{d}x,$$

其中上式两边都允许取 $+\infty$.

定理 2.15. (**Fatou 引理**) 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 可测，$f_k, g : E \to \mathbb{R}$ 可积，且

$$f_k(x) \geq g(x), \qquad \text{a.e. } k \geq 1,$$

则

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\ \mathrm{d}x \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\ \mathrm{d}x.$$

§3. 向量值函数及 Liapounoff 定理

本节中，我们将允许函数取值于 $\mathbb{R}^n$，为简单起见，我们只考虑函数定义域为一维子集的情形.

定义 3.1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 可测, $f \equiv (f_1, \cdots, f_n)^\top : E \to \mathbb{R}^n$, 则 f 称为一个**向量值函数**[9].

(i) 称 f 是 (Lebesgue, Borel) 可测的，如果所有 $f_k : E \to \mathbb{R}$ 是 (Lebesgue, Borel) 可测的.

(ii) 称 f 是 (Lebesgue) 可积的, 如果所有 $f_k : E \to \mathbb{R}$ 是可积的. 此时, 我们记

$$\int_E f(t)\ \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_E f_1(t)\ \mathrm{d}t \\ \vdots \\ \displaystyle\int_E f_n(t)\ \mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

值得注意的是当 $n > 1$ 时，$\displaystyle\int_E f(t)\ \mathrm{d}t \in \mathbb{R}^n$, 而不是 $\mathbb{R}$.

向量值函数的导数可以类似地定义.

我们指出命题 2.11—2.13(除去 2.12(ii)) 对向量值函数也成立.

现在，我们叙述关于向量值函数积分的一个非常漂亮的结果，在以后各章，这一结果将非常有用.

定理 3.2. (**P. K. Liapounoff 定理**) 设 $y(\cdot) \in L^1(a,b;\mathbb{R}^n)$, $\lambda(\cdot) : [a,b] \to [0,1]$ 可测, 则存在可测集 $E \subseteq [a,b]$, 使得

$$\int_a^b \lambda(t) y(t)\ \mathrm{d}t = \int_E y(t)\ \mathrm{d}t.$$

推论 3.3. 设 $y(\cdot) \in L^1(a,b;\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in (0,1)$ 是一个常数, 则存在可测集 $E \subseteq [a,b]$, 使得 $m(E) = \lambda(b-a)$,

$$\lambda \int_a^b y(t)\ \mathrm{d}t = \int_E y(t)\ \mathrm{d}t.$$

[9] 同点的表示类似，在行文中，我们也经常把 f 写成 $(f_1, \cdots, f_n)$.

由 Liapounoff 定理，容易归纳地证明以下更一般的 Liapounoff 型定理:

定理 3.4. 设 $E \subseteq [a,b]$ 可测, $y_j(\cdot) \in L^1(E;\mathbb{R}^n)$, $\lambda_j(\cdot):[a,b] \to [0,1]$ 可测 $(1 \le j \le \ell)$, 满足

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j(t) = 1, \qquad \text{a.e. } E,$$

则存在可测集 $E_j \subseteq E$, 使得

$$E = \bigcup_{j=1}^{\ell} E_j, \quad \text{且 } E_i \bigcap E_j = \phi \ (i \neq j),$$

$$\sum_{j=1}^{\ell} \int_E \lambda_j(t) y_j(t) \ \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{E_j} y_j(t) \ \mathrm{d}t.$$

§4. 泛函分析中的一些结果

在变分理论、最优控制理论中，熟练运用泛函分析中揭示的一些深刻结果，是极为重要的. 在这一节，我们着重引用本课程常用的一些结果.

基本概念

定义 4.1. 线性空间 X 称为是**赋范线性空间**, 如果存在一个称为**范数**的映射 $\|\cdot\| : X \to [0,+\infty)$ 满足以下条件:

(i) $\|x\| \ge 0$, $\forall\, x \in X$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \ \|x\|$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$;

(iii) (**三角不等式**) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\forall\, x, y \in X$.

如果对任何满足以下条件的序列 $x_k \in X$ (称为 Cauchy 序列):

$$\lim_{k,\ell\to\infty} \|x_k - x_\ell\| = 0,$$

总有 $x \in X$ 使得[10]

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0,$$

则称为 X 是一个完备的赋范线性空间 (通常称为 **Banach 空间**).

常用的 Banach 空间有

(i) Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$, 对于其中的元 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$，赋予范数

$$\|x\|_p \triangleq \Big(\sum_{i=1}^n |x^i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.1}$$

其中 $p \in [1, +\infty]$. 当 $p = 2$ 时，(4.1) 就给出了通常的 Euclidean 范数 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. 当 $p = +\infty$ 时，$\|x\|_\infty \triangleq \max\limits_{1\le i\le n} |x^i|$. 可以证明任何让 $\mathbb{R}^n$ 成为赋范线性空间的范数 $|||\cdot|||$ 都是与 $\|\cdot\|$**等价**的，即存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1\|x\| \ \le\ |||x||| \ \le\ C_2\|x\|, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

(ii) l^p 空间:

$$l^p \triangleq \begin{cases} \Big\{\{a^k\}_{k\ge1}\Big| a^k \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{k\ge1} |a^k|^p < +\infty\Big\}, & p \in [1, +\infty), \\ \Big\{\{a^k\}_{k\ge1}\Big| a^k \in \mathbb{R},\ \sup\limits_{k\ge1} |a^k| < +\infty\Big\}, & p = +\infty, \end{cases}$$

[10]这样的 x 称为 x_k 的 (强) 极限. 对于赋范线性空间, 容易证明当一个序列的极限存在时，极限总是惟一的.

赋予范数

$$\|\{a^k\}\|_{l^p} \triangleq \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k\geq 1}|a^k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, & p\in[1,+\infty), \\ \sup\limits_{k\geq 1}|a^k|, & p=+\infty. \end{cases}$$

(iii) L^p 空间:

$$L^p(a,b;\mathbb{R}^n) \triangleq \begin{cases} \{f:(a,b)\to\mathbb{R}^n \big| \int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t < +\infty\}, & p\in[1,+\infty), \\ \{f:(a,b)\to\mathbb{R}^n \big| \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(a,b)} |f(t)| < +\infty\}, & p=+\infty, \end{cases}$$

赋予范数

$$\|f\|_{L^p(a,b;\mathbb{R}^n)} \triangleq \begin{cases} \Big(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}}, & p\in[1,+\infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(a,b)} |f(t)|, & p=+\infty. \end{cases}$$

通常 $L^p(a,b;\mathbb{R})$ 记为 $L^p(a,b)$.

(iv) C 空间:

$$C([a,b];\mathbb{R}^n) \triangleq \{f:[a,b]\to\mathbb{R}^n \big| f(\cdot)\ \text{连续}\},$$

赋予范数

$$\|f\|_{C([a,b];\mathbb{R}^n)} = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

值得注意的是在上面的例子中，只有 $\mathbb{R}^n$ 是有限维的. 任取一个非零的 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 则 $\{t^k\xi \big| k\geq 1\}\subseteq C([a,b];\mathbb{R}^n)\subseteq L^p(a,b;\mathbb{R}^n)$ 是一个线性无关的无限集. 这表明 $L^p(a,b;\mathbb{R}^n)$ 和 $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ 都是无限维的. 同样可以证明 l^p 也是无限维的. 今后我们将会看到，无限维空间与有限维空间之间有着许多本质的区别. 这一点，在处

理无限维空间的问题时一定要引起足够的重视. 而对于有限维赋范线性空间，本质上它们都等同于同一维数的 Euclid 空间.

以下，我们将以 X 表示 Banach 空间 (有限维或无限维).

定义 4.2. 映射 $f : X \to \mathbb{R}$ 称为是**有界线性泛函**, 如果:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x, y \in X, \tag{4.3}$$

而且存在 $M \geq 0$, 使得

$$|f(x)| \leq M\|x\|, \qquad \forall\, x \in X. \tag{4.4}$$

从 (4.4) 可见，有界线性泛函 f 将 X 中的有界集映成有界集. 另一方面，可以证明若 f 满足 (4.3)(称为线性泛函)，且将 X 中的任何有界集映成有界集，则 f 一定是有界线性泛函. 这就是为什么我们把这种泛函称为是有界的. 进一步，由 (4.3)—(4.4), 可得

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|, \qquad \forall\, x, y \in X.$$

因此，一个有界线性泛函一定是 Lipschitz 连续的. 另一方面，可以证明一个线性泛函如果是连续的，则它一定是有界的. 因此，对于 X 上的线性泛函，今后将不再区别有界性和连续性.

对于任何有界线性泛函 $f : X \to \mathbb{R}$，我们定义

$$\|f\| \triangleq \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \equiv \sup_{\|x\|=1} |f(x)|, \tag{4.5}$$

称之为 f 的范数. 这是因为如果我们记 X^* 为 X 上有界线性泛函的全体, 并在其中引入线性结构:

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x), \qquad \forall\, x \in X,\ f, g \in X^*,$$

则 X^* 就成为一个线性空间，而 (4.5) 成为 X^* 上的一个范数．进一步可以证明在这个范数下，X^* 还是一个 Banach 空间．我们称之为 X 的**对偶 (对偶空间)**．

以下类型的结果称为 **Riesz 表示定理**，它们给出了对偶空间的一种表达方式．

定理 4.3. 设 $p \in [1, +\infty)$, 令 q(时常被记为 p') 为 p 的对偶数:

$$q = p' \triangleq \begin{cases} \dfrac{p}{p-1}, & \text{如果 } p \neq 1, \\ +\infty, & \text{如果 } p = 1, \end{cases}$$

则

$$(l^p)^* = l^q, \tag{4.6}$$

$$\left\{L^p(a, b; \mathbb{R}^n)\right\}^* = L^q(a, b; \mathbb{R}^n). \tag{4.7}$$

但是,

$$(l^\infty)^* \neq l^1, \ \left\{L^\infty(a, b; \mathbb{R}^n)\right\}^* \neq L^1(a, b; \mathbb{R}^n).$$

以上面的 (4.7) 为例, 其含义是: 存在一个一一的线性映射 $\mathscr{R} : \left\{L^p(a, b; \mathbb{R}^n)\right\}^* \to L^q(a, b; \mathbb{R}^n)$ 使对任何 $F \in \left\{L^p(a, b; \mathbb{R}^n)\right\}^*$, 具有表示

$$\begin{cases} F(g) = \displaystyle\int_a^b \langle \mathscr{R}(F)(t), g(t) \rangle \, \mathrm{d}t, \quad \forall\, g \in L^p(a, b; \mathbb{R}^n), \\ \|F\| = \|\mathscr{R}(F)\|_{L^q(a,b;\mathbb{R}^n)}. \end{cases}$$

也就是说，$\mathscr{R}$ 是 $\left\{L^p(a, b; \mathbb{R}^n)\right\}^*$ 到 $L^q(a, b; \mathbb{R}^n)$ 的一个**等距同构**．我们称之为 **Riesz 映射**．同样，(4.6) 的含义是类似的．

由于 X^* 是 Banach 空间，我们可以进一步定义其对偶 $(X^*)^*$, 称为 X 的二次对偶，记为 X^{**}．注意到，对任何 $x \in X$, 通过定义

$$x^{**}(f) \triangleq f(x), \qquad \forall\, f \in X^*,$$

可以得到 $x^{**} \in X^{**}$ 且 $\|x\|_X = \|x^{**}\|_{X^{**}}$. 因此，$x \mapsto x^{**}$ 定义了 X 到 X^{**} 的一个保范映射. 这样，我们就可以把 X 与 X^{**} 的一个子集等同起来: $X \subseteq X^{**}$. 我们定义:

定义 4.4. Banach 空间 X 称为是**自反的**，如果 $X^{**} = X$.

显然，对任何 $p \in (1, +\infty)$，l^p 以及 $L^p(a, b; \mathbb{R}^n)$ 都是自反的. 同样，$\mathbb{R}^n$ 也是自反的. 但是 l^1, l^∞, $L^1(a, b; \mathbb{R}^n)$, $L^\infty(a, b; \mathbb{R}^n)$ 以及 $C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ 都不是自反的.

Banach 空间的拓扑性质

首先，我们来看 Banach 空间中的收敛性质.

定义 4.5. 设 X 是 Banach 空间.

(i) 称序列 $x_k \in X$ (强)**收敛于** $x \in X$(记为 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$)，如果

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0;$$

(ii) 称序列 $x_k \in X$**弱收敛于** $x \in X$(记为 $\text{w-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$)[11]，如果

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k - x) = 0, \qquad \forall\ f \in X^*;$$

(iii) 称序列 $f_k \in X^*$**弱 * 收敛于** $f \in X^*$(记为 $\text{w}^*\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$)[12]，如果

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \qquad \forall\ x \in X.$$

[11] 也常记为 $x_k \xrightarrow{\text{w}} x$ 或 $x_k \rightharpoonup x$

[12] 也常记为 $x_k \xrightarrow{\text{w}^*} x$

在 Banach 空间中，序列强收敛一定弱收敛．而对于 X 的对偶空间，在其中既可以谈弱收敛, 又可以谈弱 * 收敛．此时，弱收敛强于弱 * 收敛．而当 X 是自反空间时，在 X^* 中弱收敛和弱 * 收敛是等价的．

下面，我们来看几个今后要遇到的例子．

设 $p \in [1, +\infty)$, $x_k(\cdot), x(\cdot) \in L^p(a, b; \mathbb{R}^n)$, 则在 $L^p(a, b; \mathbb{R}^n)$ 中 $x_k(\cdot)$ 收敛于 $x(\cdot)$ 当且仅当

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b |x_k(t) - x(t)|^p \, \mathrm{d}t = 0;$$

而 $x_k(\cdot)$ 弱收敛于 $x(\cdot)$ 当且仅当对任何 $g(\cdot) \in L^{p'}(a, b; \mathbb{R}^n)$

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \langle g(t), x_k(t) - x(t)\rangle \, \mathrm{d}t = 0. \tag{4.8}$$

对于 $p \in (1, +\infty]$, 在 $L^p(a, b; \mathbb{R}^n)$ 中 $x_k(\cdot)$ 弱 * 收敛于 $x(\cdot)$ 当且仅当对任何 $g(\cdot) \in L^{p'}(a, b; \mathbb{R}^n)$, (4.8) 成立．

由于 $p \in (1, +\infty)$ 时，$L^p(a, b; \mathbb{R}^n)$ 是自反空间，因而在其中弱收敛和弱 * 收敛是一样的．一般说来，对于 $p = 1$，我们通常不讲弱 * 收敛，而对于 $p = +\infty$, 我们通常不讲弱收敛．在应用中，$p = 1, 2, +\infty$ 的情形是用得最多的．

前面已经指出，强收敛蕴涵着弱收敛，而弱收敛又蕴涵着弱 * 收敛．但反过来的结论不一定成立．

例 4.1. 考虑 $x_k(t) = \sin kt$, 则 $x_k(\cdot) \in L^2(0, \pi)$, 且

$$\|x_k\|^2 = \int_0^\pi \sin^2 kt \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}, \quad \forall\, k \geq 1.$$

另一方面，由 Riemann-Lebesgue 引理，对任何 $y(\cdot) \in L^2(0, \pi)$, 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\pi y(t) \sin kt \, \mathrm{d}t = 0,$$

即 $x_k(\cdot)$ 在 $L^2(0,\pi)$ 中弱收敛于 0. 但是, 显然 $x_k(\cdot)$ 不是强收敛的 (为什么?).

例 4.2. 定义

$$c_0 \stackrel{\triangle}{=} \big\{\{x^i\}_{i\geq 1}\big|\lim_{i\to\infty} x^i = 0\big\},$$

赋予范数 $\|\cdot\|_{l^\infty}$, 则 c_0 是 l^∞ 的一个闭子空间. 可以证明

$$c_0^* = l^1.$$

现在取 $x_k \in l^1$:

$$x_k = \{\delta_{ik}\}_{i\geq 1}.$$

则 $\|x_k\|_{l^1} = 1$. 显然, 对任何 $y \equiv (y^i)_{i\geq 1} \in c_0$,

$$x_k(y) = y^k \to 0, \qquad k \to \infty.$$

这就是说序列 x_k 在 l^1 中弱 * 收敛于 0. 但是如果取

$$\bar{y} \equiv \{(-1)^i\}_{i\geq 1} \in (l^1)^* = l^\infty,$$

我们有

$$\bar{y}(x_k) = (-1)^k, \qquad \forall\ k \geq 1.$$

因此 x_k 在 l^1 中不是弱收敛的.

现在我们转而叙述 Banach 空间几个重要而深刻的性质. 首先我们回顾一下拓扑空间的基本概念.

定义 4.6. 设 Y 是非空集. $\mathscr{T} \subseteq 2^Y$ 称为一个拓扑, 如果

(i) $Y, \phi \in \mathscr{T}$.

(ii) 若 $A, B \in \mathscr{T}$, 则 $A \bigcap B \in \mathscr{T}$.

(iii) $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}$, 则 $\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1} A \in \mathscr{T}$.

称偶对 $(Y,\mathscr{T})$ 为**拓扑空间**(当 $\mathscr{T}$ 明确时, 简记为 Y). 称 $\mathscr{T}$ 中的元为拓扑空间 $(Y,\mathscr{T})$ 的开集. 如果 Y 上有两个拓扑 $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ 满足 $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$, 则称 $\mathscr{T}_2$ 是比 $\mathscr{T}_1$ 更强的拓扑.

在 Y 的所有拓扑中,$\{Y,\phi\}$ 以及 2^Y 分别是最弱和最强的拓扑. 前者称为**平庸的拓扑**, 后者称为**离散的拓扑**.

定义 4.7. 设 $(Y,\mathscr{T})$ 为拓扑空间. $y, y_k \in Y$ $(k=1,2,\cdots)$, 如果对任何包含 y 的 $U \in \mathscr{T}$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $k \geq N$ 时, 总有 $y_k \in U$, 则称 y 是 y_k 的极限. 记为 $\lim_{k\to\infty} y_k = y$.

一般说来, 拓扑空间中, 序列的极限可以不惟一. 对于 Banach 空间 X 及其对偶空间 X^*, 我们可以引入如下拓扑:

定义 4.8. (i) X 上的**强拓扑**: 集合 $G \subseteq X$ 是开集当且仅当对任何 $x_0 \in G$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\{x \in X \,\big|\, \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subseteq G;$$

(ii) X 上的**弱拓扑**: 集合 $G \subseteq X$ 是开集当且仅当对任何 $x_0 \in G$, 存在 $f_1, \cdots, f_m \in X^*$ 以及 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m > 0$, 使得

$$\{x \in X \,\big|\, |f_i(x - x_0)| < \varepsilon_i,\ 1 \leq i \leq m\} \subseteq G;$$

(iii) X^* 上的**弱 * 拓扑**: 集合 $G \subseteq X^*$ 是开集当且仅当对任何 $f_0 \in G$, 存在 $x_1, \cdots, x_m \in X$ 以及 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m > 0$, 使得

$$\{f \in X^* \,\big|\, |f(x_i) - f_0(x_i))| < \varepsilon_i,\ 1 \leq i \leq m\} \subseteq G;$$

于是，前面介绍的强收敛、弱收敛及弱 * 收敛就分别对应于按强拓扑、弱拓扑及弱 * 拓扑收敛.

以下结果在应用中是极为重要的.

定理 4.9. 设 $\{x_k\}$ 是 Banach 空间中的弱收敛序列, 则它一定是有界的, 即存在常数 $K > 0$ 使得

$$\|x_k\| \leq K, \qquad \forall\, k \geq 1.$$

定理 4.10. 设 X 是可分的 Banach 空间, 则 X^* 中的有界列必有弱 * 收敛的子列.

定理 4.11. (**Eberlein-Shmulyan**) 设 X 是 Banach 空间, 则 X 是自反空间当且仅当 X 中的有界列都有弱收敛的子列.

定理 4.12. (**Banach-Alaoglu**) 设 X 是赋范线性空间, 则 X^* 中的单位闭球是弱 * 紧的.

定理 4.13. (**Mazur**) 设 X 是 Banach 空间，$x, x_k \in X$, $\text{w-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$, 则存在 $\alpha_{kj} \in [0,1]$, $j = 1, 2, \cdots, N_k$, 使得

$$\sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{kj} = 1, \qquad \forall\, k = 1, 2, \cdots,$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{kj} x_{k+j} = x.$$

换言之，对于 Banach 空间中的弱收敛序列，可以找到它的凸组合强收敛到原来的极限.

定理 4.9 是著名的 (Banach-Steinhaus) 共鸣定理的一个特例. 定理 4.10 是一个比较容易证明的定理，定理 4.13 是 Hahn-Banach 延拓定理的一个推论，而定理 4.11 以及 4.12 则是很深刻的结果. 由定理 4.11，我们知道对任何 $p \in (1, +\infty)$, $L^p(a, b; \mathbb{R}^n)$ 中的有界列必有弱收敛的子列. 由于可分性，这一点也可以由定理 4.10 得到. 由定理 4.10 我们还可以知道 $L^\infty(a, b; \mathbb{R}^n)$ 中的有界列必定有弱 * 收敛的子列. 也就是说，如果 $f_k \in L^\infty(a, b; \mathbb{R}^n)$ 满足

$$\|f_k\|_{L^\infty} \leq M < +\infty, \qquad \forall\, k = 1, 2, \cdots,$$

则存在 f_k 的子列 f_{k_j} 及 $f \in L^\infty(a, b; \mathbb{R}^n)$，使得

$$\lim_{j \to \infty} \int_a^b f_{k_j}(t) g(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t) g(t)\ \mathrm{d}t$$

对任何 $g \in L^1(a, b; \mathbb{R}^n)$ 成立，但是，定理 4.11 告诉我们，确实存在着 $L^\infty(a, b; \mathbb{R}^n)$ 中的有界列，它没有弱收敛子列. 当 X 既不是自反空间又不是可分空间时，X^* 中的有界列就不能保证有弱收敛或弱 * 收敛的子列，尽管如此，由定理 4.12，我们却可以得到如下结果:

推论 4.14. 设 X 是赋范线性空间. $f_k \in X^*$ 是有界列, 则存在 $f \in X^*$ 使得对任何 $x \in X$, 存在 f_k 的子列 f_{k_j} 成立着:

$$\lim_{j \to \infty} f_{k_j}(x) = f(x).$$

需要注意的是在上面的推论中，子列的选取是依赖于 x 的. 但在应用中，往往这样的结论已经足够了.

§5. 常微分方程

我们现在简要地回顾常微分方程解的概念及其性质. 考虑以下常微分方程:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \ t \in [0, T], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{5.1}$$

我们假设:

(L) 映射 $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可测，$f(\cdot\,, 0) \in L^1(0, T; \mathbb{R}^n)$, 且存在常数 $M > 0$ 使得

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq M|x - y|, \qquad \forall\, t \in [0, T], \ x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.2}$$

以下是关于解的存在惟一性的基本定理.

定理 5.1. 设条件 (L) 成立, 则对任何 $y_0 \in \mathbb{R}^n$, 存在惟一的 $y(\cdot) \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ 满足

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, \mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0, T]. \tag{5.3}$$

方程 (5.3) 称为 (5.1) 的积分形式. 相应地，(5.1) 称为 (5.3) 的微分形式. 任何满足 (5.3) 的函数 $y(\cdot) \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ 称为 (5.1) 的一个解. 由 (5.3)，我们可见 (5.1) 的解一定是绝对连续的，这意味着 $\dot{y}(\cdot)$ 几乎处处存在且 Newton-Leibniz 公式成立:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(s)\, \mathrm{d}s, \qquad t \in [0, T].$$

证明. 构造 Picard 迭代序列:

$$\begin{cases} y_0(t) = y_0, \quad t \in [0, T], \\ y_{k+1}(t) = y_0 + \displaystyle\int_0^t f(s, y_k(s))\, \mathrm{d}s, \quad t \in [0, T], \quad k \geq 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

我们来归纳地证明

$$|y_{k+1}(t)-y_k(t)|\le \frac{N(Mt)^k}{k!},\qquad \forall\, t\in[0,T],\ k\ge 0, \tag{5.5}$$

其中 $N=\int_0^T |f(s,y_0)|\ \mathrm{d}s$.

对于 $k=0$, 我们有

$$|y_1(t)-y_0(t)|\le \int_0^t |f(s,y_0)|\ \mathrm{d}s\le N,\qquad t\in[0,T].$$

从而 (5.5) 对于 $k=0$ 成立.

假设 (5.5) 对某个 k 成立，则由 (5.2),

$$\begin{aligned} &|y_{k+2}(t)-y_{k+1}(t)|\le \int_0^t M|y_{k+1}(s)-y_k(s)|\ \mathrm{d}s\\ \le\ & M\int_0^t \frac{N(Ms)^k}{k!}\ \mathrm{d}s=\frac{NM^{k+1}}{k!}\int_0^t s^k\ \mathrm{d}s\\ =\ & \frac{N(Mt)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

这样就证明了 (5.5). 由于级数

$$\sum_{k\ge 0}\frac{N(Mt)^k}{k!}$$

在 $t\in[0,T]$ 上一致收敛, 因此

$$y_k(t)=y_0(t)+\sum_{j=1}^{k}\Big[y_j(t)-y_{j-1}(t)\Big]$$

在 $t\in[0,T]$ 上一致收敛到某个 $y(\cdot)\in C([0,T];\mathbb{R}^n)$. 于是，在 (5.4) 中取极限立即得到 $y(\cdot)$ 满足 (5.3). 这就证明了 (5.1) 解的存在性.

下面我们来证明惟一性. 假设 $x(\cdot)$ 是另一个解, 则

$$|x(t)-y(t)|\le M\int_0^t |x(s)-y(s)|\ \mathrm{d}s.$$

利用下面的 Gronwall 不等式，立即得到

$$x(t) = y(t), \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

这就证明了惟一性. □

引理 5.2. (**Gronwall 不等式**) 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot), \psi(\cdot), \beta(\cdot)$ 是 $[0, T]$ 上的连续函数，$\psi(\cdot)$ 非负. 如果

$$\varphi(t) \le \alpha + \int_0^t \Big[\psi(s)\varphi(s) + \beta(s)\Big]\, \mathrm{d}s,\ t \in [0, T], \tag{5.6}$$

则

$$\varphi(t) \le \alpha \mathrm{e}^{\int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s} + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_s^t \psi(r)dr} \beta(s)\, \mathrm{d}s,\ t \in [0, T]. \tag{5.7}$$

证明. 令

$$\theta(t) = \alpha + \int_0^t \Big[\psi(s)\varphi(s) + \beta(s)\Big]\, \mathrm{d}s,\ t \in [0, T], \tag{5.8}$$

则

$$\dot{\theta}(t) = \psi(t)\varphi(t) + \beta(t) \le \psi(t)\theta(t) + \beta(t),\ t \in [0, T].$$

两边同乘以 $\mathrm{e}^{-\int_0^t \psi(r)dr}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\mathrm{e}^{-\int_0^t \psi(r)dr}\theta(t)\right\} \le \mathrm{e}^{-\int_0^t \psi(r)dr}\beta(t), \quad t \in [0, T]. \tag{5.9}$$

对 (5.9) 求积分得

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t \psi(r)dr}\theta(t) - \alpha \le \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \psi(r)dr}\beta(s)\, \mathrm{d}s,\ t \in [0, T].$$

结合 (5.6),(5.8) 即得 (5.7). □

下面，我们来看一下解对参数的连续依赖性. 考虑如下含参数的常微分方程:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t), \lambda),\ t \in [0, T], \\ y(0) = y_0^\lambda. \end{cases} \tag{5.10}$$

其中 $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times (0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $y_0^\lambda \in \mathbb{R}^n$. 我们假设:

(L)′ 映射 $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可测，存在与 $\lambda \in (0, 1]$ 无关的 $\beta(\cdot) \in L^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ 和常数 $M > 0$, 使得

$$\begin{cases} |f(t, 0, \lambda)| \le \beta(t), & \forall\ t \in [0, T], \\ |f(t, x, \lambda) - f(t, y, \lambda)| \le M|x - y|, & \forall\ t \in [0, T],\ x, y \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5.11}$$

显然，由定理 5.1, 在条件 (L)′ 下，对任何 $y_0^\lambda \in \mathbb{R}^n$,(5.10) 总有惟一的解，记为 $y^\lambda(\cdot) \equiv y(\cdot; y_0^\lambda, \lambda)$. 下面的定理给出了 $y^\lambda(\cdot)$ 与方程 (5.1) 的解 $y(\cdot)$ 之间的关系.

定理 5.3. 设条件 (L) 和 (L)′ 成立. 进一步，假设

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_0^t f(s, y, \lambda)\ \mathrm{d}s = \int_0^t f(s, y)\ \mathrm{d}s, \quad \forall\ (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n. \tag{5.12}$$

记 $y(\cdot)$, $y^\lambda(\cdot)$ 分别为 (5.1) 和 (5.10) 的解. 若

$$\lim_{\lambda \to 0^+} |y_0^\lambda - y_0| = 0, \tag{5.13}$$

则

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \max_{t \in [0, T]} |y^\lambda(t) - y(t)| = 0.$$

为了证明以上定理，我们先来叙述以下引理.

引理 5.4. (**Arzelà-Ascoli**) 设 $\mathscr{F} \subseteq C([a,b];\mathbb{R}^n)$ 一致有界: 存在 $K>0$, 使得

$$|\eta(t)| \le K, \qquad \forall\, t\in[a,b],\ \eta\in\mathscr{F},$$

且等度连续, 即对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 满足

$$|\eta(t)-\eta(s)|<\varepsilon,\ \ \forall\, s,t\in[a,b],\ |t-s|<\delta,\ \eta\in\mathscr{F},$$

则存在一列 $\{\eta_k(\cdot)\}\subseteq\mathscr{F}$ 在 $C[0,T]$ 中收敛于某个 $\eta(\cdot)$:

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t\in[0,T]}|\eta_k(t)-\eta(t)|=0.$$

以上引理的证明可在泛函分析的教材中找到.

引理 5.5. 设 (L) 和(L)$'$ 以及 (5.12) 成立. 设 $\zeta(\cdot),\varphi(\cdot,\lambda):[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 连续, 且

$$\lim_{\lambda\to0^+}\max_{t\in[0,T]}|\varphi(t,\lambda)-\zeta(t)|=0, \tag{5.14}$$

则

$$\lim_{\lambda\to0^+}\int_0^t f(s,\varphi(s,\lambda),\lambda)\,\mathrm{d}s=\int_0^t f(s,\zeta(s))\,\mathrm{d}s,$$

关于 $t\in[0,T]$ 一致收敛.

证明. 首先, 对任何 $0\le t_1<t_2\le T$ 以及 $y\in\mathbb{R}^n$, 由 (5.12) 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to0^+}\int_{t_1}^{t_2} f(s,y,\lambda)\,\mathrm{d}s\\
=\ &\lim_{\lambda\to0^+}\Big(\int_0^{t_2} f(s,y,\lambda)-\int_0^{t_1} f(s,y,\lambda)\Big)\,\mathrm{d}s\\
=\ &\Big(\int_0^{t_2} f(s,y)-\int_0^{t_1} f(s,y)\Big)\,\mathrm{d}s=\int_{t_1}^{t_2} f(s,y)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

从而可证对于任何阶梯函数 $\varphi(\cdot)$ 有

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\int_0^t f(s,\varphi(s),\lambda)\ \mathrm{d}s=\int_0^t f(s,\varphi(s))\ \mathrm{d}s. \tag{5.15}$$

下面，我们证明 (5.15) 关于 $t\in[0,T]$ 是一致的.

由 (5.11),

$$|f(s,\varphi(s),\lambda)|\le \beta(s)+M|\varphi(s)|,\qquad s\in[0,T].$$

这样，由 Lebesgue 积分的绝对连续性可知, 对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\sigma>0$ 使得当 $|t_1-t_2|<\sigma$ 时成立着

$$|\int_{t_1}^{t_2} f(s,\varphi(s),\lambda)\ \mathrm{d}s|+|\int_{t_1}^{t_2} f(s,\varphi(s))\ \mathrm{d}s|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.16}$$

选取 $0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_\ell=T$, 使得

$$0<\tau_{i+1}-\tau_i<\sigma,\quad 0\le i\le \ell-1.$$

由 (5.15), 存在 $\delta>0$ 使得对任何 $0<\lambda<\delta$, 有

$$|\int_0^{\tau_i} f(s,\varphi(s),\lambda)\ \mathrm{d}s-\int_0^{\tau_i} f(s,\varphi(s))\ \mathrm{d}s|<\frac{\varepsilon}{2},\ 0\le i\le \ell-1. \tag{5.17}$$

而对任何 $t\in[0,T]$, 存在 $0\le i\le \ell-1$ 使得 $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$. 于是，结合 (5.16)—(5.17), 可得对任何 $0<\lambda<\delta$ 有

$$\begin{aligned}
&|\int_0^t f(s,\varphi(s),\lambda)\ \mathrm{d}s-\int_0^t f(s,\varphi(s))\ \mathrm{d}s|\\
\le\ &|\int_0^{\tau_i} f(s,\varphi(s),\lambda)\ \mathrm{d}s-\int_0^{\tau_i} f(s,\varphi(s))\ \mathrm{d}s|\\
&+|\int_{\tau_i}^t f(s,\varphi(s),\lambda)\ \mathrm{d}s|+|\int_{\tau_i}^t f(s,\varphi(s))\ \mathrm{d}s|<\varepsilon.
\end{aligned}$$

这就表明 (5.15) 关于 $t\in[0,T]$ 是一致收敛的.

现设 $\varphi(\cdot,\lambda),\zeta(\cdot)\in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 满足 (5.14). 由于 $\zeta(\cdot)$ 连续，我们可以找到一列阶梯函数 $\zeta_k(\cdot)$ 使得

$$|\zeta(t)-\zeta_k(t)|<\frac{1}{k},\qquad \forall\ t\in[0,T],\ k\geq 1.$$

于是

$$\begin{aligned}
&|\int_0^t f(s,\varphi(s,\lambda),\lambda)\ \mathrm{d}s-\int_0^t f(s,\zeta(s))\ \mathrm{d}s|\\
\leq\ &\int_0^t |f(s,\varphi(s,\lambda),\lambda)-f(s,\zeta(s),\lambda)|\ \mathrm{d}s\\
&+\int_0^t |f(s,\zeta(s),\lambda)-f(s,\zeta_k(s),\lambda)|\ \mathrm{d}s\\
&+|\int_0^t f(s,\zeta_k(s),\lambda)\ \mathrm{d}s-\int_0^t f(s,\zeta_k(s))\ \mathrm{d}s|\\
&+\int_0^t |f(s,\zeta_k(s))-f(s,\zeta(s))|\ \mathrm{d}s\\
\leq\ &MT\max_{t\in[0,T]}|\varphi(t,\lambda)-\zeta(t)|+\frac{2MT}{k}\\
&+|\int_0^t f(s,\zeta_k(s),\lambda)\ \mathrm{d}s-\int_0^t f(s,\zeta_k(s))\ \mathrm{d}s|.
\end{aligned}$$

由此，立即可得要证的结论. □

定理 5.3 的证明. 首先，对任何 $\lambda\in(0,1]$, 我们有

$$y^\lambda(t)=y_0^\lambda+\int_0^t f(s,y^\lambda(s),\lambda)\ \mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T].\tag{5.18}$$

由 (L)$'$,

$$|y^\lambda(t)|\leq|y_0^\lambda|+\int_0^t\Big\{M|y^\lambda(s)|+\beta(s)\Big\}\ \mathrm{d}s.$$

这样，由 Gronwall 不等式，

$$|y^\lambda(t)|\ \ \leq\ \ \mathrm{e}^{Mt}|y_0^\lambda|+M\int_0^t \mathrm{e}^{M(t-s)}\beta(s)\ \mathrm{d}s$$

$$\leq \quad e^{LM}\sup_{\lambda}|y_0^\lambda| + M\int_0^T e^{M(T-s)}\beta(s)\ \mathrm{d}s$$
$$\equiv \quad K < +\infty, \quad \forall\ t \in [0,T],$$

其中由 (5.13)，不妨认为 y_0^λ 是有界的. 另一方面，对于 $0 \leq s < t \leq T$, 当 $t - s \to 0$ 时, 关于 $\lambda \in (0,1]$ 一致地有

$$|y^\lambda(t) - y^\lambda(s)| \leq \int_s^t |f(r, y^\lambda(r))|\ dr$$
$$\leq \quad \int_s^t \Big\{|f(r,0)| + M|y^\lambda(r)|\Big\}\ dr \to 0.$$

从而, $\{y^\lambda(\cdot)\}$ 是等度连续的. 因此，由 Arzelà-Ascoli 定理，存在 $\zeta(\cdot) \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 使得 $\{y^\lambda(\cdot)\}$ 的一个子列，不妨设为其本身，满足

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\max_{t\in[0,T]}|y^\lambda(t) - \zeta(t)| = 0.$$

于是，在 (5.18) 中取极限，并利用引理 5.5，就得到

$$\zeta(t) = y_0 + \int_0^t f(s,\zeta(s))\ \mathrm{d}s, \qquad t \in [0,T].$$

即 $\zeta(\cdot)$ 是方程 (5.1) 的解. 由解的惟一性，必有 $\zeta(\cdot) = y(\cdot)$. 由于 $y^\lambda(\cdot)$ 的任何子列均有一致收敛的子列，而这些收敛子列又都一致收敛到同一极限 $y(\cdot)$，因此它必然一致收敛到 $y(\cdot)$. □

当方程 (5.1) 是线性方程时，我们可以利用常数变易法得到进一步的结果. 这一结果是研究线性系统时非常重要的基础. 我们考虑

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{5.19}$$

其中 $0 \leq t_0 < T$, $A(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$. 我们称 (5.19) 为**线性微分方程**. 如果 $f(t) \equiv 0$, 则称为**齐次的**，否则就称

为**非齐次的**. 如果 $A(\cdot)$ 以及 $f(\cdot)$ 不依赖于 t, 则称为**时不变的 (定常的)**，否则就称为是**时变的**[13].

命题 5.6. 设 $A(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times n})$, $f(\cdot)\in L^1(0,T;\mathbb{R}^n)$, $y_0\in\mathbb{R}^n$, 则 (5.19) 有惟一解 $y(\cdot)\in C([0,T];\mathbb{R}^n)$. 而且成立着以下的**常数变易公式**:

$$y(t)=\Phi(t,t_0)y_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)f(s)\ \mathrm{d}s,\ t\in[t_0,T],$$

其中 $\Phi(t,s)=\Phi(t)\Phi(s)^{-1}$, 而

$$\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t),\ t\geq 0,\ \Phi(0)=I.$$

§6. 变分学基础

我们简单地介绍变分学中的基础知识.

给定 $y_0,y_1\in\mathbb{R}^n$，记

$$\mathscr{F}\triangleq\{y(\cdot)\in C^1([0,T];\mathbb{R}^n)\Big|y(0)=y_0,\ y(T)=y_1\}.$$

易见集合 $\mathscr{F}$ 非空. 在其上定义如下泛函:

$$J(y(\cdot))=\int_0^T f(t,y(t),\dot{y}(t))\mathrm{d}t,\qquad\forall\ y(\cdot)\in\mathscr{F}.$$

我们有如下问题

问题 (C). 寻找 $\bar{y}(\cdot)\in\mathscr{F}$, 使得

$$J(\bar{y}(\cdot))=\inf_{y(\cdot)\in\mathscr{F}}J(y(\cdot)).\tag{6.1}$$

[13]定常 (非定常) 系统又称为自治 (非自治) 系统

满足 (6.1) 的 $\bar{y}(\cdot)$ 称为 J 在 $\mathscr{F}$ 上的最小值点. 下面的命题给出了最小值点所满足的一阶必要条件.

命题 6.1. 设 $f(\cdot,\cdot,\cdot)\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, $\bar{y}(\cdot)$ 是 J 在 $\mathscr{F}$ 上的最小值点, 则成立着以下的 **Euler-Lagrange 方程**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_z(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t))-f_y(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t))=0,\ t\in[0,T], \tag{6.2}$$

其中 f_y, f_z 分别表示 f 关于第二、第三个变量的梯度.

证明. 记

$$C_0^1([0,T];\mathbb{R}^n)\triangleq\{\eta(\cdot)\in C^1([0,T];\mathbb{R}^n)\Big|\eta(0)=\eta(T)=0\},$$

则对任何 $\eta(\cdot)\in C_0^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ 以及 $\delta>0$,

$$\bar{y}(\cdot)+\delta\eta(\cdot)\in\mathscr{F}.$$

于是,

$$\begin{aligned}0 &\le \frac{1}{\delta}\Big[J\Big(\bar{y}(\cdot)+\delta\eta(\cdot)\Big)-J(\bar{y}(\cdot))\Big]\\ &= \frac{1}{\delta}\int_0^T\Big\{f(t,\bar{y}(t)+\delta\eta(t),\dot{\bar{y}}(t)+\delta\dot{\eta}(t))-f(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t))\Big\}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

令 $\delta\to0^+$, 并利用分部积分即得

$$\begin{aligned}0 &\le \int_0^T\Big\{\langle f_y(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t)),\eta(t)\rangle+\langle f_z(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t)),\dot{\eta}(t)\rangle\Big\}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\Big\{\langle f_y(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_z(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t)),\eta(t)\rangle\Big\}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $\eta(\cdot)\in C_0^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ 是任意的，在上式中以 $-\eta(\cdot)$ 代替 $\eta(\cdot)$ 可以得到反向的不等式, 从而

$$\int_0^T\Big\{\langle f_y(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_z(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t)),\eta(t)\rangle\Big\}\,\mathrm{d}t=0.$$

由此, 我们可得 (6.2). □

我们进一步寻找 $\bar{y}(\cdot)$ 所满足的其他条件. 为此，我们在 $\delta = 0$ 附近把 $J(\bar{y}(\cdot) + \delta\eta(\cdot))$ 作二阶展开[14]:

$$\begin{aligned}
& J\Big(\bar{y}(\cdot) + \delta\eta(\cdot)\Big) - J(\bar{y}(\cdot)) \\
= \; & \int_0^T \Big\{ \delta\Big[\langle f_y(t,\bar{y},\dot{\bar{y}}), \eta(t)\rangle + \langle f_z(t,\bar{y},\dot{\bar{y}}), \dot{\eta}(t)\rangle\Big] \\
& + \frac{\delta^2}{2}\Big\langle \begin{pmatrix} f_{yy}(t,\bar{y},\dot{\bar{y}}) & f_{yz}(t,\bar{y},\dot{\bar{y}}) \\ f_{zy}(t,\bar{y},\dot{\bar{y}}) & f_{zz}(t,\bar{y},\dot{\bar{y}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} \Big\rangle \Big\} \, \mathrm{d}t \\
& + o(\delta^2).
\end{aligned}$$

这样我们就得到最小值点的**二阶必要条件**:

命题 6.2. *设 $f(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\bar{y}(\cdot)$ 是 J 在 $\mathscr{F}$ 上的最小值点, 则*

$$\int_0^T \Big\langle \begin{pmatrix} f_{yy}(t,\bar{y},\dot{\bar{y}}) & f_{yz}(t,\bar{y},\dot{\bar{y}}) \\ f_{zy}(t,\bar{y},\dot{\bar{y}}) & f_{zz}(t,\bar{y},\dot{\bar{y}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} \Big\rangle \, \mathrm{d}t \geq 0,$$

$$\forall\ \eta(\cdot) \in C_0^1([0,T]; \mathbb{R}^n).$$

对于变分问题最小解的存在性，开始人们并没有引起足够的重视. Gauss 曾说：如果在任何情况下，积分泛函总是非负的，那么一定会有一个函数使积分达到最小值.

但是，事实并非如此，19 世纪末，Weierstrass 给出了一个变分问题取不到最小值的例子. Weierstrass 考虑的是 $[-1,1]$ 上的连续可微函数 $u(\cdot)$，满足 $u(1) = 1, u(-1) = -1$. 变分问题是最小化积分

$$I(u(\cdot)) = \int_{-1}^1 \left| x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right|^2 \mathrm{d}x.$$

[14]今后在一些较长的式子中，我们将省略一些函数中的变量 t.

取

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\arctan(\frac{x}{\varepsilon})}{\arctan(\frac{1}{\varepsilon})}, \qquad \varepsilon > 0,$$

则

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I(u_\varepsilon) = 0.$$

Weierstrass 发现 I 在所考虑的函数类中的下确界为 0，但是 0 这个值却是达不到的.

注记

1. 命题 1.6 不能推广到无限维空间中去. 在无限维空间中，即使 E 是紧集，$\operatorname{co} E$ 仍有可能不是闭集.
2. 在二次性能指标的研究中，平行四边形法则 (参见 (1.5)) 有着重要的作用. 在一般的 Hilbert 空间中，平行四边形法则也是成立的. 一般地，我们还有如下的 Clarkson 不等式:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^p \mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^p \mathrm{d}x \\ \le \quad & \frac{1}{2}\int_\Omega |\varphi|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\psi|^p \mathrm{d}x, \qquad p \ge 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\int_\Omega \left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p-1}} + \left[\int_\Omega \left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p-1}} \\ \le \quad & \left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\varphi|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\psi|^p \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p-1}}, \qquad 1 < p \le 2. \end{aligned}$$

3. Liapounoff 定理 (定理 3.2) 是由 A. A. Liapounoff 于 1940 年证明的. 称为向量值测度的值域定理. 原来的证明很长，后来有许多简化证明. 关于该定理的一个简短证明可参见雍炯敏在 1984 年《数学研究与评论》第 2 期上的文章 [5].
4. 一般说来，无限维 Banach 空间中，序列的弱收敛和强收敛是不同的. 但是根据 Schur 定理，在 l^1 中，序列的弱收敛等价于强收敛.

5. 在应用中，Gronwall 不等式会有不同的表述方式，也会需要适当的推广. 为此，我们给出 Gronwall 不等式的两个不同于正文中的证明. 他们对于推广和理解 Gronwall 不等式都是很有帮助的.

   (a) 证法 1. 反复迭代: 记 $M = \max|\varphi|$, 则

   $$\varphi(t) \quad \leq \quad \alpha + M\int_0^t \psi(s)\ \mathrm{d}s + \int_0^t \beta(s)\ \mathrm{d}s.$$

   从而再次迭代，并利用分步积分易得

   $$\begin{aligned}\varphi(t) \quad &\leq \quad \alpha + \int_0^t \psi(s)\Big[\alpha + M\int_0^s \psi(r)dr + \int_0^s \beta(r)dr\Big]\mathrm{d}s \\ &\quad\quad + \int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s \\ &= \quad \alpha\Big\{1 + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s\Big\} + \int_0^t \beta(s)\Big\{1 + \int_s^t \psi(r)dr\Big\}\mathrm{d}s \\ &\quad\quad + \frac{M}{2}(\int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s)^2.\end{aligned}$$

   一般地，可以得到

   $$\begin{aligned}\varphi(t) \quad &\leq \quad \alpha\Big\{1 + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(\int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s\Big)^k\Big\} \\ &\quad + \int_0^t \beta(s)\Big\{1 + \int_s^t \psi(r)dr + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(\int_s^t \psi(r)dr\Big)^k\Big\}\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{M}{(k+1)!}\Big(\int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s\Big)^{k+1}.\end{aligned}$$

   令 $k \to \infty$ 即得 Gronwall 不等式.

   (b) 证法 2. 令 ζ 为以下积分方程的解:

   $$\zeta(t) = \alpha + \int_0^t \Big[\psi(s)\zeta(s) + \beta(s)\Big]\mathrm{d}s,\ t \in [0, T],$$

   则

   $$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = \psi(t)\zeta(t) + \beta(t),\ t \in [0, T], \\ \zeta(0) = \alpha. \end{cases}$$

   从而

   $$\zeta(t) = \alpha \mathrm{e}^{\int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s} + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_s^t \psi(r)dr}\beta(s)\ \mathrm{d}s,\ t \in [0, T].$$

另一方面，比较 ζ 和 φ 可得

$$\varphi(t)-\zeta(t)\le\int_0^t\psi(s)\Big[\varphi(s)-\zeta(s)\Big].$$

对上式利用前一种方法 (相应的证明更容易) 可得:

$$\varphi(t)-\zeta(t)\le 0.$$

这就是要证明的.

习题

1. 证明命题 1.2.
2. 设 $E_1,E_2\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集. 考察使 $E_1\bigcup E_2$ 和 $E_1\setminus E_2$ 为凸集的条件.
3. 设 $E\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸的. 证明 $\overline{E}$ 是凸的.
4. (i) 证明对任何 $E\subseteq\mathbf{R}^n$, $\overline{\mathrm{co}\,E}=\overline{\mathrm{co}}\,E$.
   (ii) 举例说明 $\mathrm{co}\,\overline{E}\ne\overline{\mathrm{co}}\,E$ 是可能的.
   (iii) 证明：对于 $\mathbf{R}^n$ 中有界集 E, $\quad\mathrm{co}\,\overline{E}=\overline{\mathrm{co}}E$.
5. 设 $E\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个凸集，$x_0\in\partial E\overset{\triangle}{=}\overline{E}\bigcap\overline{E^c}$(称为 E 的边界), 则存在 $\lambda\in\mathbf{R}^n$, $|\lambda|=1$ 使得
$$\langle\lambda,x_0\rangle\le\langle\lambda,y\rangle,\qquad\forall\ y\in E.$$
   这时，超平面 $\langle\lambda,x\rangle=\langle\lambda,x_0\rangle$ 就称为 E 在 x_0 点的支撑面.
6. 设 A 是一个 $(m\times n)$ 矩阵，$b\in\mathbf{R}^m$. 证明: 集合
$$\{x\in\mathbf{R}^n|\ Ax=b,\ |x|\le 1\}$$
   是凸闭集.
7. 设 $c_i\in\mathbf{R}$, $\quad\lambda_i\in\mathbf{R}^n$ 满足 $|\lambda_i|=1$, $1\le i\le k$, 则集合
$$\{x\in\mathbf{R}^n|\langle\lambda_i,x\rangle\le c_i,\ 1\le i\le k\}$$
   是 $\mathbf{R}^n$ 中的凸闭集.
8. 设 $E\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个凸闭集, 证明 E 可以表示成至多可列个半空间的交.
9. 设 $E_1,E_2\subseteq\mathbf{R}^n$ 为内部不相交的凸集, 证明: 存在 $\lambda\in\mathbf{R}^n$, $|\lambda|=1$ 满足
$$\langle\lambda,x_1\rangle\le\langle\lambda,x_2\rangle,\qquad\forall\ x_1\in E_1,\ x_2\in E_2.$$

10. 如果 $E_1, E_2 \subseteq \mathbf{R}^n$ 为不相交的凸闭集, 是否成立如下结论: 存在 $\lambda \in \mathbf{R}^n$, $|\lambda| = 1$ 满足

$$\langle \lambda, x_1 \rangle < \langle \lambda, x_2 \rangle, \qquad \forall\, x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2.$$

11. 证明定理 2.10.

12. 设 $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, $1 < p < +\infty$, $g \in L^{p'}(\Omega)$. 证明

$$J(f) \triangleq \int_\Omega (|f|^p - fg)\mathrm{d}x$$

的任意一个极小化序列 $\{f_k\}$ 都是 $L^p(\Omega)$ 中的强收敛序列.

13. 设 $f : E \to \mathbf{R}^n$ 可积. 取 $|\cdot|$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中通常的 Euclid 范数, 则 (2.3) 仍成立.

14. 设 $f_k : E \to \mathbf{R}^n$, $g : E \to \mathbf{R}$ 可积, 且对某个 $f : E \to \mathbf{R}^n$, (2.5) 成立. 证明 f 可积且 (2.6) 成立.

15. 设 $f : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ 可积, $\lambda \in (0, 1)$. 直接证明如下结论: $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在可测集 $E_\lambda(\varepsilon) \subseteq [a, b]$, 使得

$$m(E_\lambda(\varepsilon)) = \lambda(b - a),$$
$$\left|\lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{E_\lambda(\varepsilon)} f(t)\ \mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

提示: 首先证明 f 为简单函数时的情形.

16. 设 $f : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ 可积. 令

$$\mathcal{R} \triangleq \{\int_E f(t)\mathrm{d}t \Big| E \subseteq [a, b] \text{ 可测 }\}.$$

利用上一题的结果证明 $\overline{\mathcal{R}}$ 是凸集.

17. 设 $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \to \mathbf{R}^n$, 对任何 $t \in [\alpha, \beta]$, $f(t, \cdot) : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ 可积, 且

$$\lim_{\theta \to t} \int_a^b |f(t, s) - f(\theta, s)|\ \mathrm{d}s = 0,$$

则对任何 $\lambda \in (0, 1)$ 以及 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $E_\lambda(\varepsilon) \subseteq [a, b]$, 使得

$$m(E_\lambda(\varepsilon)) = \lambda(b - a),$$
$$\left|\lambda \int_a^b f(t, s)\ \mathrm{d}s - \int_{E_\lambda(\varepsilon)} f(t, s)\ \mathrm{d}s\right| < \varepsilon, \quad \forall\, t \in [\alpha, \beta].$$

18. 设上一题的条件成立, 且 $\alpha = a$, $\beta = b$, 则对任何 $\lambda \in (0,1)$ 以及 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $E_\lambda(\varepsilon) \subseteq [a,b]$ 满足 $m(E_\lambda(\varepsilon)) = \lambda(b-a)$, 使得

$$\left|\lambda \int_a^t f(t,s)\ \mathrm{d}s - \int_{[a,t]\cap E_\lambda(\varepsilon)} f(t,s)\ \mathrm{d}s\right| < \varepsilon, \quad \forall\ t \in [a,b].$$

19. 证明定理 3.4.

20. 证明 Banach 空间 X 中单位闭球 $\overline{B}_1(0)$ 是紧的当且仅当 $\dim X < +\infty$.

21. 证明对于空间 $X = l^2, L^2(\Omega)$, 平行四边形法则仍然成立:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \qquad \forall\ x, y \in X.$$

22. (4.6) 的确切意义是什么?

23. 证明赋范线性空间上一个线性泛函是连续的当且仅当是有界的.

24. 设 $\|\!|\cdot|\!\|$ 是让 $\mathbf{R}^n$ 成为赋范线性空间的范数，证明 (4.2) 成立.

25. 证明 Banach 空间 X 上的强拓扑强于弱拓扑，(如果 X 是某个 Banach 空间的对偶) 弱拓扑强于弱 * 拓扑.

26. 证明序列按定义 4.5 定义的强收敛、弱收敛和弱 * 收敛分别等价于按定义 4.7 在强拓扑空间、弱拓扑空间和弱 * 拓扑空间中的收敛.

27. 设 $X = \ell^\infty$. 取 $f_k = (\overbrace{0,\cdots,0}^{k\text{个}},1,0,\cdots) \in \ell^1 \subset (\ell^\infty)^*$. 试问: 对 f_k 运用推论 4.14 可以得到什么样的结论.

28. 设 Banach 空间 X 中的序列 $\{x_k\}$ 具有如下性质:
(1) 该序列的任何子列都有弱收敛子列.
(2) 该序列的任何弱收敛子列都弱收敛于同一个元 $x \in X$.
证明:$\{x_k\}$ 必定弱收敛于 x.

29. 设 K 是 Banach 空间 X 中的凸闭集. $x_k \in K$ 在 X 中弱收敛于 x, 则 $x \in K$.

30. 证明命题 5.6.

31. 设 $f : [0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续可微. 考虑方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x)\sin kt, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

记方程的解为 $x_k(\cdot)$, 则极限 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(t)$ 是否存在? 为什么?

32. 设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为常数矩阵，$t \in \mathbf{R}$. 令[15]

$$e^{tA} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

证明:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}, \\ e^{tA}|_{t=0} = I. \end{cases}$$

进一步，有

$$e^{tA} A = A e^{tA}, \quad \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}.$$

33. 设 $u(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 是 $[a, b]$ 上的非负连续函数，

$$u(t) \le \alpha + \beta \int_a^t u(s)v(s)ds, \qquad \forall\, t \in [a, b],$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 是常数，证明

$$u(t) \le \alpha e^{\beta \int_a^t v(s)ds}, \qquad \forall\, t \in [a, b].$$

34. 设 $u(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)$ 是 $[a, b]$ 上的非负连续函数，$v(\cdot)$ 非负，

$$u(t) \le w(t) + \int_a^t u(s)v(s)ds, \qquad \forall\, t \in [a, b].$$

证明

$$u(t) \le w(t) + \int_a^t v(s)w(s)e^{\int_s^t v(\sigma)d\sigma} ds, \qquad \forall\, t \in [a, b].$$

35. 在引理 5.2 中，涉及到的某些函数的连续性可以降低为可积性，试给出相应的可积性条件使结论仍然成立.

36. 试利用 Euler-Lagrange 方程求解第一章例 1.4 中的捷线问题.

[15] e^{tA} 也可以用 $\lim\limits_{n\to\infty}(I + \dfrac{tA}{n})^n$ 来定义.

第三章 线性系统的时间最优控制

§1. 能控性

我们考虑以下线性系统:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中, $A : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times m}$, 而 $y(\cdot)$ 和 $u(\cdot)$ 分别是取值于 $\mathbb{R}^n$ 和 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 的函数, 称为**状态轨线**和**控制**. 称 $t_0 \in [0, +\infty)$ 以及 $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 为**初始时间**和**初始状态**. 在这一章中，我们总是假定以下基本条件成立.

$$(L1) \qquad \begin{cases} A(\cdot) \in L^\infty_{loc}[0, +\infty; \mathbb{R}^{n\times n}), B(\cdot) \in L^\infty_{loc}[0, +\infty; \mathbb{R}^{n\times m}), \\ U \subseteq \mathbb{R}^m \quad \text{非空.} \end{cases}$$

对于 $0 \leq t_0 < T < +\infty$, $p \in [1, +\infty]$, 记

$$\begin{cases} \mathscr{U}[t_0, T] \triangleq \{u : [t_0, T] \to U \Big| u(\cdot) \text{ 可测}\}, \\ \mathscr{U}[t_0, +\infty) \triangleq \{u : [t_0, +\infty) \to U \Big| u(\cdot) \text{ 可测}\}, \\ \mathscr{U}^p[t_0, T] \triangleq \mathscr{U}[t_0, T] \bigcap L^p(t_0, T; \mathbb{R}^m), \\ \mathscr{U}^p[t_0, +\infty) \triangleq \mathscr{U}[t_0, +\infty) \bigcap L^p_{loc}[t_0, +\infty; \mathbb{R}^m), \end{cases}$$

其中

$$L^p_{loc}[t_0, +\infty; X) \triangleq \Big\{u : (t_0, +\infty) \to X \Big| |u(\cdot)| \in L^p(t_0, T), \ \forall T > t_0\Big\},$$

这里 X 可以是任意的 Banach 空间，特别，可以是任意维数的 Euclid 空间. 易见，当 U 有界时，$\mathscr{U}^p[t_0, T]$($\mathscr{U}^p[t_0, +\infty)$) 对于不同

的 $p \in [1,+\infty]$ 都等于 $\mathscr{U}[t_0,T](\mathscr{U}[t_0,+\infty))$. 但是，如果 U 是无界的, 对应于不同的 $p \in [1,+\infty]$, $\mathscr{U}^p[t_0,T](\mathscr{U}^p[t_0,+\infty))$ 就可能是不同的. 不过，对任何 $p \geq q$ 以及 $T > 0$, 成立着

$$\mathscr{U}^p[t_0,T] \subseteq \mathscr{U}^q[t_0,T], \quad (\mathscr{U}^p[t_0,+\infty) \subseteq \mathscr{U}^q[t_0,+\infty)).$$

以下命题是关于方程 (1.1) 解的一个基本结果, 它是第二章命题 5.6 的一个特例.

命题 1.1. 在条件 (L1) 下, 对任何 $(t_0,y_0) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ 以及 $u(\cdot) \in \mathscr{U}^p[t_0,+\infty)$, (1.1) 有惟一的解 $y(\cdot) \equiv y(\cdot\,;t_0,y_0,u(\cdot))$. 进一步，成立以下的常数变易公式:

$$y(t) = \Phi(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)u(s)\ \mathrm{d}s, \qquad t \geq t_0, \tag{1.2}$$

其中，$\Phi(t,s) \stackrel{\triangle}{=} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$, 而 $\Phi(t)$ 是 (1.1) 的基本解矩阵:

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \qquad t \geq 0, \qquad \Phi(0) = I.$$

现在设 $M : [0,T] \to 2^{\mathbb{R}^n}$. 我们考虑以下问题:

问题 (C). 对于给定的 $(t_0,y_0) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, 寻找一个 $u(\cdot) \in \mathscr{U}^p[t_0,+\infty)$ 和时刻 $T \geq t_0$, 使得

$$y(T;t_0,y_0,u(\cdot)) \in M(T).$$

定义 1.2. (i) 系统 (1.1) 称为是**从 (t_0,y_0) 到目标 $M(\cdot)$ 能控的**，如果问题 (C) 至少有一个解.

(ii) 系统 (1.1) 称为是**到目标 $M(\cdot)$ 能控的**，如果对任何 $(t_0,y_0) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$，它都是从 (t_0,y_0) 到目标 $M(\cdot)$ 能控的.

(iii) 设 $t_1 > t_0$. 系统 (1.1) 称为是**在 $[t_0, t_1]$ 上完全能控的**, 如果对任何 $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$, 都有控制 $u(\cdot) \in \mathscr{U}^p[t_0, t_1]$, 使得:

$$y(t_1; t_0, y_0, u(\cdot)) = y_1.$$

(iv) 系统 (1.1) 称为是完全能控的, 如果对任何 $0 \le t_0 < t_1 < +\infty$, 系统都是在 $[t_0, t_1]$ 上完全能控的.

(v) 系统 (1.1) 称为是**在 $[t_0, t_1]$ 上正则的**, 如果

$$\eta^\top \Phi(s)^{-1} B(s) = 0, \quad \text{a.e. } \; s \in [t_0, t_1] \implies \eta = 0.$$

(vi) 系统 (1.1) 称为是**正则**的, 如果对任何 $0 \le t_0 < t_1 < +\infty$, 系统在 $[t_0, t_1]$ 上是正则的.

显然, (iv) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i). 而一般说来, 反之不然. 我们称问题 (C) 为能控性问题. 下面结果给出了正则性和能控性之间的等价关系.

定理 1.3. 设

$$U = \mathbb{R}^m, \tag{1.3}$$

$t_0, t_1 \in [0, +\infty), t_0 < t_1$, 且条件 (L1) 成立, 则以下各条等价:

(i) 系统 (1.1) 在 $[t_0, t_1]$ 上完全能控;

(ii) 系统 (1.1) 在 $[t_0, t_1]$ 上是正则的;

(iii)

$$\Psi(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi(s)^{-1} B(s) [\Phi(s)^{-1} B(s)]^\top \, \mathrm{d}s$$

是可逆的.

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 反证法. 假设 (1.1) 在 $[t_0, t_1]$ 上不是正则的, 则存在 $\eta \neq 0$ 使得

$$\eta^\top \Phi(s)^{-1} B(s) = 0, \qquad \text{a.e.} \;\; s \in [t_0, t_1].$$

于是, 对任何 $u(\cdot) \in \mathscr{U}^p[t_0, t_1]$, 在 (1.2) 两边同乘以 $\eta^\top \Phi(t_1)^{-1}$, 我们可得

$$\begin{aligned} & \eta^\top \Phi(t_1)^{-1} y(t_1) \\ = \;& \eta^\top \Phi(t_0)^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \eta^\top \Phi(s)^{-1} B(s) u(s) \; \mathrm{d}s \\ = \;& \eta^\top \Phi(t_0)^{-1} y_0 \triangleq c. \end{aligned}$$

上式表明, 所有 (从 (t_0, y_0) 出发) 能在 t_1 时刻到达的点都只能落在平面 $\eta^\top \Phi(t_1)^{-1} y = c$ 上. 这就是说 (1.1) 在 $[t_0, t_1]$ 上不是完全能控的.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 再一次运用反证法. 假设 $\Psi(t_0, t_1)$ 不可逆, 则存在 $\eta \neq 0$, 使得

$$0 = \Psi(t_0, t_1)\eta = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(s)^{-1} B(s) [\Phi(s)^{-1} B(s)]^\top \eta \; \mathrm{d}s.$$

上式两端同乘以 $\eta^\top$, 我们有

$$\int_{t_0}^{t_1} \left| [\Phi(s)^{-1} B(s)]^\top \eta \right|^2 \mathrm{d}s = 0,$$

这就导出了

$$\eta^\top \Phi(s)^{-1} B(s) = 0, \qquad \text{a.e.} \;\; s \in [t_0, t_1],$$

与 (1.1) 的正则性矛盾.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 对任何 $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$, 我们取

$$u(t) = [\Phi(t)^{-1} B(t)]^\top \eta, \qquad t \in [t_0, t_1],$$

其中 $\eta \in \mathbb{R}^n$ 待定. 如果能取到 η 使得

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi(t_1,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,s)B(s)B(s)^\top[\Phi(s)^{-1}]^\top \eta \, \mathrm{d}s \\ &= \Phi(t_1,t_0)y_0 + \Phi(t_1)\Psi(t_0,t_1)\eta, \end{aligned}$$

则我们就得到了完全能控性. 为此，我们只需取

$$\eta = \Psi(t_0,t_1)^{-1}\Big[\Phi(t_1)^{-1}y_1 - \Phi(t_0)^{-1}y_0\Big].$$

□

现在，我们来考察时不变系统. 此时，控制系统为:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \qquad t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中,$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. 由于系统是时不变的，不失一般性，我们可取初始时间 t_0 为 0. 我们假设 (1.3) 成立. 由命题 1.3, 可知 (1.4) 在 $[0,\delta]$ 是完全能控的当且仅当它在 $[0,\delta]$ 上是正则的，即:

$$\eta^\top \mathrm{e}^{-tA}B = 0, \quad \forall\, t \in [0,\delta] \implies \eta = 0;$$

也当且仅当

$$\Psi(\delta) \triangleq \int_0^\delta \mathrm{e}^{-sA}BB^\top \mathrm{e}^{-sA^\top}\,\mathrm{d}s$$

非奇异. 因此，类似于上述, 易证以下结果.

命题 1.4. 设 (1.3) 成立, $\delta > 0$, 则以下各条等价:

(i) 系统 (1.4) 在 $[0,\delta]$ 完全能控;

(ii) 如果 $\eta \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\eta^\top \mathrm{e}^{tA}B = 0, \qquad \forall\, t \in [0,\delta],$$

则 $\eta = 0$;

(iii) 矩阵 $\overline{\Psi}(\delta) = \int_0^\delta e^{tA}BB^\top e^{tA^\top}\,dt$ 是正定的.

进一步，我们有以下结果.

定理 1.5. 设 (1.3) 成立, 则以下各条等价:

(i) 系统 (1.4) 完全能控;

(ii) 对某个 $\delta > 0$, 系统 (1.4) 在 $[0, \delta]$ 上完全能控;

(iii) 以下 **Kalman 秩条件**成立:

$$\text{rank}\ (B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n; \tag{1.5}$$

(iv) 对任何 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\text{rank}\ (B, \lambda I - A) = n. \tag{1.6}$$

证明. (i)$\Longrightarrow$(ii) 显然成立.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 如果 (1.5) 不成立，则存在 $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 使得

$$\eta^\top A^k B = 0, \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.7}$$

由 Hamilton-Cayley 定理可见 (1.7) 事实上对所有的 $k \geq 0$ 成立. 因此，

$$\eta^\top e^{tA} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \eta^\top A^k B}{k!} = 0, \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

于是 (1.4) 在 $[0, \delta]$ 上不是正则的，矛盾.

(iii)$\Longrightarrow$(i) 如果对某个 $\delta > 0$, 在 $[0, \delta]$ 上 (1.4) 不是正则的, 即有 $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 使得

$$\eta^\top e^{tA} B = 0, \qquad \forall\ t \in [0, \delta],$$

则对上式在 $t=0$ 多次求导即得 (1.7)，这与 (1.5) 矛盾. 从而由 (1.5) 可得到 (1.4) 的正则性. 由此即得 (i).

(iii)$\Longrightarrow$(iv) 如果 (1.6) 不成立，则存在 $\lambda\in\mathbb{C}$ 以及 $\eta\neq 0$ 使得

$$\eta^\top B=0,\qquad \eta^\top A=\lambda\eta^\top.$$

于是

$$\eta^\top A^kB=\lambda^k\eta^\top B=0,\qquad \forall\ k\geq 0,$$

与 (1.5) 矛盾.

(iv)$\Longrightarrow$(iii) 首先，我们注意到对任何可逆阵 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$,

$$\text{rank }(B,\widetilde{A})=n\iff \text{rank }(Q^{-1}B,Q^{-1}\widetilde{A})=n. \tag{1.8}$$

事实上，如果有 $\eta\neq 0$ 使得

$$\eta^\top Q^{-1}B=0,\ \eta^\top Q^{-1}\widetilde{A}=0,$$

则对于 $\tilde{\eta}=[Q^{-1}]^\top\eta\neq 0$, 成立着

$$\tilde{\eta}^\top B=0,\ \tilde{\eta}^\top\widetilde{A}=0.$$

这意味着如果 (1.8) 的右端不成立，则其左端也不成立. 类似地，可以证明反向的结论. 一般地，我们有

$$\begin{aligned}&\text{rank }(B,AB,\cdots,A^{n-1}B)\\=\ &\text{rank }(Q^{-1}B,Q^{-1}AB,\cdots,Q^{-1}A^{n-1}B).\end{aligned} \tag{1.9}$$

同样，我们可以证明 $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}&\text{rank }(B,\lambda I-A)=\text{rank }(Q^{-1}B,\lambda Q^{-1}-Q^{-1}A)\\=\ &\text{rank }(Q^{-1}B,\lambda I-Q^{-1}AQ).\end{aligned} \tag{1.10}$$

利用上面的结果，我们可以将问题转化为标准型. 也就是说，如果假设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ 是 A 的所有特征值，则可设

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_\ell \end{pmatrix} P^{-1},\ B = P \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_\ell \end{pmatrix},$$

其中

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}_{n_k \times n_k}, \ 1 \le k \le \ell, \tag{1.11}$$

$n_1 + \cdots + n_\ell = n$. 在 (1.10) 中取 $Q = P$ 可得 (1.6) 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 成立当且仅当

$$\text{rank}\ (B_k, \lambda_k I - A_k) = n_k,\ 1 \le k \le \ell.$$

从而由 (1.6), 对任何 $1 \le k \le \ell$,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & B_k^1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & B_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & B_k^{n_k - 1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_k^{n_k} \end{pmatrix}_{n_k \times (n_k + m)} = n_k,$$

其中

$$B_k^\top = ((B_k^1)^\top \cdots (B_k^{n_k})^\top)^\top,\ \ (B_k^i)^\top \in \mathbb{R}^m,\ \ 1 \le i \le n_k,\ 1 \le k \le \ell,$$

因此，必有

$$B_k^{n_k} \neq 0, \quad 1 \le k \le \ell. \tag{1.12}$$

记 $\widetilde{A}_k = A_k - \lambda_k I_{n_k}$, 此时 $\widetilde{A}_k$ 相当于原来 (1.11) 中的 A_k, 而相应的 λ_k 为 0. 由二项展开式易见对任何 $j \geq 1$,

$$\widetilde{A}_k^j B_k \text{ 是 } B_k, A_k B_k, \cdots, A_k^j B_k \text{ 的线性组合},$$

同理,

$$A_k^j B_k \text{ 是 } B_k, \widetilde{A}_k B_k, \cdots, \widetilde{A}_k^j B_k \text{ 的线性组合}.$$

从而

$$\begin{aligned} & \text{rank } (B_k, A_k B_k, \cdots, A_k^{n_k-1} B_k) \\ = \ & \text{rank } (B_k, \widetilde{A}_k B_k, \cdots, \widetilde{A}_k^{n_k-1} B_k) \\ = \ & n_k, \qquad \forall\, 1 \leq k \leq \ell. \end{aligned}$$

上面最后一个等式利用 (1.12) 直接计算而得. 注意到在 (1.9) 式中取 $Q = P$ 可得 (1.5) 成立的充分必要条件是

$$\text{rank } (B_k, A_k B_k, \cdots, A_k^{n_k-1} B_k) = n_k, \ 1 \leq k \leq \ell,$$

我们就证明了 (1.5). □

§2. 能达集

现在，我们定义系统 (1.1) 的**能达集**: 对于 $(t_0, y_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, 定义

$$\mathcal{R}^p(T; t_0, y_0) \triangleq \Big\{ y(T; t_0, y_0, u(\cdot)) \Big| \ u(\cdot) \in \mathscr{U}^p[t_0, T] \Big\}, \quad \forall\, T \geq t_0.$$

为简单起见，以下我们只考虑 $p = 2$, $t_0 = 0$ 而且 y_0 固定的情形. 一般情形可以类似地加以研究. 简记 $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}^2(T; 0, y_0)$. 以下结果是显而易见的.

命题 2.1. 设 U 是有界凸集, 则 $\mathcal{R}(T)$ 同样是有界凸集.

更深刻的结果为

定理 2.2. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 非空, 则 $\mathcal{R}(T)$ 是凸集.

证明. 设 $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$, $\lambda \in (0,1)$, 则有 $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathscr{U}^2[0,T]$ 使得

$$y_i = \Phi(T,0)y_0 + \int_0^T \Phi(T,s)B(s)u_i(s)\ \mathrm{d}s, \qquad i = 1,2.$$

于是

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 &= \Phi(T,0)y_0 + \int_0^T \Phi(T,s)B(s)u_2(s)\ \mathrm{d}s \\ &+ \lambda \int_0^T \Phi(T,s)B(s)[u_1(s) - u_2(s)]\ \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由第二章推论 3.3，存在可测集 $E \subseteq [0,T]$ 使得

$$\begin{aligned} &\lambda \int_0^T \Phi(T,s)B(s)[u_1(s) - u_2(s)]\ \mathrm{d}s \\ = &\int_E \Phi(T,s)B(s)[u_1(s) - u_2(s)]\ \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.1}$$

定义

$$u(s) = \begin{cases} u_1(s), & s \in E, \\ u_2(s), & s \in [0,T] \setminus E, \end{cases}$$

则 $u(\cdot) \in \mathscr{U}^2[0,T]$, 而且由 (2.1) 可得

$$\begin{aligned} &\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \\ = &\Phi(T,0)y_0 + \int_0^T \Phi(T,s)B(s)u_2(s)\ \mathrm{d}s \\ &+ \int_E \Phi(T,s)B(s)[u_1(s) - u_2(s)]\ \mathrm{d}s \\ = &\Phi(T,0)y_0 + \int_0^T \Phi(T,s)B(s)u(s)\ \mathrm{d}s \in \mathcal{R}(T). \end{aligned}$$

这就证明了 $\mathcal{R}(T)$ 是凸集. □

接下来，我们准备讨论能达集的闭性. 首先，我们指出，$\mathcal{R}(T)$ 并不总是闭的.

例 2.1. 设 $U=(0,1]$, $A=0$, $B=1$, $t_0=0$, $y_0=0$, 则易见

$$0\in\overline{\mathcal{R}(t)}\setminus\mathcal{R}(t),\qquad\forall\ t>0.$$

在上面的例子中，U 有界，但不是闭集. 当 U 是有界闭集时，我们可得本节的主要结果.

定理 2.3. 设 U 是非空紧集, 则 $\mathcal{R}(T)$ 既是凸的，又是紧的.

我们首先证明一个比较弱的结论.

引理 2.4. 设 U 是凸紧集，则 $\mathcal{R}(t)$ 是凸紧集.

证明. 易见 $\mathcal{R}(T)$ 有界且是凸的. 我们只需要证明其闭性. 设 $y_k\equiv y(T;0,y_0,u_k(\cdot))\in\mathcal{R}(T)$, $y_k\to\bar{y}$. 由于 U 是凸紧集，由第二章定理 4.11 及练习 29, 不妨设 $u_k(\cdot)$ 在 $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ 中弱收敛于某个 $\bar{u}(\cdot)\in\mathscr{U}^2[0,T]$. 注意到

$$\Phi(T,\cdot)B(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times m})\subset L^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times m}),$$

我们有

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\lim_{k\to\infty}y_k=\lim_{k\to\infty}\left(\Phi(T,0)y_0+\int_0^T\Phi(T,s)B(s)u_k(s)\ \mathrm{d}s\right)\\&=\Phi(T,0)y_0+\int_0^T\Phi(T,s)B(s)\bar{u}(s)\ \mathrm{d}s\\&=y(T;0,y_0,\bar{u}(\cdot))\in\mathcal{R}(T).\end{aligned}$$

这就证明了引理. □

下面的引理是最优控制存在性理论中非常有用的一个引理.

引理 2.5. (**Filippov 引理**) 设 $Q:[0,T]\to 2^{\mathbb{R}^m}$ 满足: 对任何 $t\in[0,T]$, $Q(t)$ 是紧集; 进一步, 它是**上半连续的**, 即对任何 $t_0\in[0,T]$, $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$, 使得当 $|t-t_0|<\delta$ 时,

$$Q(t)\subseteq Q(t_0)+B_\varepsilon(0)\stackrel{\triangle}{=}\{u\in\mathbb{R}^m\big|d(u,Q(t_0))\le\varepsilon\}. \tag{2.2}$$

设 $f:[0,T]\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 连续, $y(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 可积, 且

$$y(t)\in f(t,Q(t))\stackrel{\triangle}{=}\{f(t,u)\big|u\in Q(t)\},\qquad \text{a.e. } t\in[0,T],$$

则存在一个可测函数 $u(\cdot)\in[0,T]\to\mathbb{R}^m$ 使得

$$u(t)\in Q(t),\quad f(t,u(t))=y(t),\qquad \text{a.e. } t\in[0,T].$$

如果 $Q(t)\equiv Q$ 不依赖于 t, 则它自然是上半连续的, 即 (2.2) 自然成立.

定理 2.3 的证明. 由于 U 是有界集, $\mathscr{U}^2[0,T]=\mathscr{U}[0,T]$. 令

$$\mathscr{V}[0,T]\stackrel{\triangle}{=}\{v:[0,T]\to\mathrm{co}\,U\big|v(\cdot)\text{ 可测}\}.$$

显然, $\mathscr{U}[0,T]\subseteq\mathscr{V}[0,T]$. 记

$$\mathcal{S}(T)=\{y(T;0,y_0,v(\cdot))\big|v(\cdot)\in\mathscr{V}[0,T]\}.$$

由引理 2.4, $\mathcal{S}(T)$ 是凸紧集. 自然地,

$$\mathcal{R}(T)\subseteq\mathcal{S}(T). \tag{2.3}$$

我们现在来证明等式成立. 对任何 $\xi\in\mathcal{S}(T)$, 有 $v(\cdot)\in\mathscr{V}[0,T]$ 满足

$$\xi=y(T;0,y_0,v(\cdot))\equiv\Phi(T,0)y_0+\int_0^T\Phi(T,s)B(s)v(s)\,\mathrm{d}s.$$

记

$$\Sigma^{m+1} = \Big\{ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \Big| \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \Big\},$$

并定义 $f : \Sigma^{m+1} \times U^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ 如下:

$$f(\lambda, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i u_i, \qquad \forall \ (\lambda, \mathbf{u}) \in \Sigma^{m+1} \times U^{m+1}.$$

显然，f 是连续的. 而由 Carathéodory 定理 (第二章，定理 1.5),

$$v(s) \in \operatorname{co} U = f(\Sigma^{m+1} \times U^{m+1}), \qquad \text{a.e. } s \in [0, T].$$

因此，由引理 2.5, 存在可测函数 $u_j(\cdot)$, $\lambda_j(\cdot)$ $(j = 0, 1, \cdots, m)$ 使得

$$u_j(s) \in U, \quad \sum_{j=0}^{m} \lambda_j(s) = 1, \quad v(s) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j(s) u_j(s).$$

这样，

$$\xi = \Phi(T, 0) y_0 + \sum_{j=0}^{m} \int_0^T \lambda_j(s) \Phi(T, s) B(s) u_j(s) \ \mathrm{d}s.$$

于是，由第二章定理 3.4, 存在可测集合 $E_j \subseteq [0, T]$ 使得

$$\begin{cases} [0, T] = \bigcup_{j=0}^{m} E_j, \quad E_j \bigcap E_k = \phi, \quad (j \neq k), \\ \sum_{j=0}^{m} \int_0^T \lambda_j(s) \Phi(T, s) B(s) u_j(s) \ \mathrm{d}s \\ \qquad = \sum_{j=0}^{m} \int_{E_j} \Phi(T, s) B(s) u_j(s) \ \mathrm{d}s. \end{cases}$$

置

$$u(\cdot) = \sum_{j=0}^{m} \chi_{E_j}(\cdot) u_j(\cdot) \in \mathscr{U}[0, T],$$

则

$$\xi = \Phi(T,0)y_0 + \int_0^T \Phi(T,s)B(s)u(s)\ \mathrm{d}s \in \mathcal{R}(T).$$

由此即知 (2.3) 中等式成立. □

现在考虑能达集的连续性. 对于 $\mathbb{R}^n$ 的任何非空子集 P, Q, 定义

$$\rho(P,Q) \triangleq \frac{1}{2}\Big\{\sup_{p\in P} d(p,Q) + \sup_{q\in Q} d(q,P)\Big\}, \tag{2.4}$$

其中 $d(p,Q) = \inf\limits_{q\in Q} |p-q|$.

易见如果 P 或 Q 无界，则 $\rho(P,Q)$ 有可能无限.

命题 2.6. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的非空集 P, Q, R, 成立

(i)

$$\rho(P,Q) = \rho(Q,P),$$

(ii)

$$\rho(P,Q) = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{P} = \overline{Q},$$

(iii)

$$\rho(P,R) \le \rho(P,Q) + \rho(Q,R). \tag{2.5}$$

证明. (i) 是显然的.

(ii) 由定义，

$$\begin{aligned} & \rho(P,Q) = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & d(p,Q) = d(q,P) = 0, \ \ \forall\, p \in P,\ q \in Q, \\ \Longleftrightarrow\quad & P \subseteq \overline{Q},\ \text{且}\ Q \subseteq \overline{P} \\ \Longleftrightarrow\quad & \overline{P} = \overline{Q}. \end{aligned}$$

(iii) 我们有

$$\begin{aligned} d(p,R) &= \inf_{r\in R}|p-r| \\ &\le \inf_{r\in R}\Big\{|p-\tilde q|+|\tilde q-r|\Big\} \\ &= |p-\tilde q|+d(\tilde q,R) \\ &\le |p-\tilde q|+\sup_{q\in Q}d(q,R), \qquad \forall\, p\in\mathbb{R}^n, \tilde q\in Q. \end{aligned}$$

对上式关于 $\tilde q\in Q$ 取下确界, 得

$$d(p,R)\le d(p,Q)+\sup_{q\in Q}d(q,R), \qquad \forall\, p\in\mathbb{R}^n.$$

再对上式关于 $p\in P$ 取上确界, 即有

$$\sup_{p\in P}d(p,R)\le\sup_{p\in P}d(p,Q)+\sup_{q\in Q}d(q,R). \tag{2.6}$$

类似地有

$$\sup_{r\in R}d(r,P)\le\sup_{r\in R}d(r,Q)+\sup_{q\in Q}d(q,P). \tag{2.7}$$

把 (2.6) 和 (2.6) 相加再除以 2 即得 (2.5). □

记 $\mathscr{K}$ 为由 $\mathbb{R}^n$ 中所有非空紧集构成的集族, 则由以上命题知 $\rho(\cdot\,,\cdot)$ 是 $\mathscr{K}$ 上的一个度量. 这一度量称为 **Hausdorff 度量**. 另一方面，值得注意的是

$$d(P,Q)\triangleq\inf_{p\in P,q\in Q}|p-q|, \qquad \forall\, P,Q\in\mathscr{K}$$

不是度量.

定理 2.7. 设 $U\subset\mathbb{R}^m$ 非空有界, 则

$$\lim_{t\to\bar t}\rho(\mathcal{R}(t),\mathcal{R}(\bar t))=0. \tag{2.8}$$

证明. 由于 U 有界. 因而有 $M>0$, 使对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}^2[0,T]$, 有

$$\|u(\cdot)\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{R}^m)}\le M.$$

我们有

$$\begin{aligned}
& |y(t;0,y_0,u(\cdot))-y(\bar t;0,y_0,u(\cdot))| \\
\le\ & \big|\Phi(t,0)-\Phi(\bar t,0)\big|\,|y_0|+\int_0^{\bar t}\big|\Phi(t,s)-\Phi(\bar t,s)\big|\,|B(s)|\,|u(s)|\,\mathrm{d}s \\
& +\Big|\int_{\bar t}^{t}\big|\Phi(t,s)\big|\,|B(s)|\,|u(s)|\,\mathrm{d}s\Big| \\
\le\ & \big|\Phi(t,0)-\Phi(\bar t,0)\big|\,|y_0|+M\int_0^{\bar t}\big|\Phi(t,s)-\Phi(\bar t,s)\big|\,|B(s)|\,\mathrm{d}s \\
& +M\,\Big|\int_{\bar t}^{t}\big|\Phi(t,s)\big|\,|B(s)|\,\mathrm{d}s\Big| \\
\triangleq\ & \gamma(t,\bar t).
\end{aligned}$$

这样, 对任何 $p\in\mathcal{R}(t)$, 及 $q\in\mathcal{R}(\bar t)$ 都有

$$d(p,\mathcal{R}(\bar t))\le\gamma(t,\bar t),\quad d(q,\mathcal{R}(t))\le\gamma(t,\bar t).$$

从而当 $t\to\bar t$ 时,

$$\rho(\mathcal{R}(t),\mathcal{R}(\bar t))\le\gamma(t,\bar t)\to 0.$$

这就证明了 (2.8). □

§3. 时间最优控制的存在和刻画

本节中，我们研究时间最优控制问题. 考虑控制系统 (1.1), 假定:

(L2) $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 为非空紧集. $M : [0, +\infty) \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是关于 Hausdorff 度量 ρ 连续的多值函数，而且对每个 $t \in [0, +\infty)$, $M(t)$ 是非空凸紧集.

由于 U 是紧的，所以控制集 $\mathscr{U}^p[0, +\infty)$ 都是相同的，简记为 $\mathscr{U}[0, +\infty)$. 另一方面，由上一节的结果可知，对任何 $(t_0, y_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, 以及 $t \geq t_0$, 能达集 $\mathcal{R}(t) \equiv \mathcal{R}(t; t_0, y_0)$ 是凸紧的. 现在给定 $(t_0, y_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, 我们假设

$$\bigcup_{t \geq t_0} \Big\{ M(t) \bigcap \mathcal{R}(t; t_0, y_0) \Big\} \neq \phi. \tag{3.1}$$

上式表示系统是从 (t_0, y_0) 到目标 $M(\cdot)$ 能控的. 定义

$$J(u(\cdot)) \equiv J(u(\cdot); t_0, y_0) = \inf\{t \geq t_0 \big| y(t; t_0, y_0, u(\cdot)) \in M(t)\}.$$

即 $J(u(\cdot); t_0, y_0)$ 是轨线 $y(\cdot\,; t_0, y_0, u(\cdot))$ 首次遇到目标 $M(\cdot)$ 的时间. 我们约定 $\inf \phi = +\infty$. 显然，不同的 $u(\cdot)$ 可能会有不同的**首次击中时间**$J(t_0, y_0; u(\cdot))$. 我们的问题是:

问题 (TC). 对于给定的 $(t_0, y_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, 假设能控性条件 (3.1) 成立. 寻找控制 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[t_0, +\infty)$ 使得

$$J(\bar{u}(\cdot); t_0, y_0) = \inf_{u(\cdot) \in \mathscr{U}[t_0, +\infty)} J(u(\cdot); t_0, y_0). \tag{3.2}$$

上述问题称为**时间最优控制问题**. 而

$$\bar{t} \triangleq \inf_{u(\cdot) \in \mathscr{U}[t_0, +\infty)} J(u(\cdot); t_0, y_0)$$

称为**最优时间**. 任何满足等式 (3.2) 的控制 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[t_0, +\infty)$ 称为**时间最优控制**. 由于我们关心的是 $\bar{u}(\cdot)$ 在 $[t_0, \bar{t}]$ 上的值，因而通常我们所指的最优控制是指 $\tilde{u}(\cdot) = \bar{u}(\cdot)|_{[t_0, \bar{t}]}$. 下面讨论 $(t_0, y_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ 固定的情形. 不失一般性，可取 $t_0 = 0$. 我们将给出时间最优控制的刻画和存在性结果. 首先, 有如下引理:

引理 3.1. 设 (L1)以及 (3.1) 成立, 则最优时间

$$\bar{t} = \inf\{t \geq 0 \Big| M(t) \bigcap R(t) \neq \phi\}. \tag{3.3}$$

证明. 这一结论直观上是非常明显的. 它其实是对最优时间 $\bar{t}$ 的另一种描述. 记

$$t^* = \inf\{t \geq 0 \Big| M(t) \bigcap R(t) \neq \phi\}.$$

首先, 若

$$M(t) \bigcap R(t) \neq \phi,$$

则说明对某个 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[t_0, +\infty)$ 有

$$J(u(\cdot)) \leq t.$$

由此可见

$$\bar{t} \leq t.$$

从而

$$\bar{t} \leq t^*.$$

另一方面, 若

$$0 \leq t < t^*,$$

则有

$$y(t; u(\cdot)) \notin M(t), \qquad \forall\ u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, +\infty).$$

于是

$$J(u(\cdot)) \geq t, \qquad \forall\ u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, +\infty),\ 0 \leq t < t^*.$$

从而

$$\bar{t} \geq t, \qquad \forall\ 0 \leq t < t^*.$$

这样又有

$$\bar{t} \geq t^*.$$

□

定理 3.2. 设 (L1)—(L2) 以及 (3.1) 成立, 则问题 (TC) 至少存在一个时间最优控制. 且最优时间 $\bar{t}$ 满足

$$\bar{t} = \min\{t \geq 0 \Big| M(t) \bigcap R(t) \neq \phi\}. \tag{3.4}$$

证明. 由引理 3.1, 可知存在一列 $t_k \downarrow \bar{t}$ 满足

$$M(t_k) \bigcap R(t_k) \neq \phi.$$

取

$$z_k \in M(t_k) \bigcap R(t_k),$$

则由于 $M(\cdot)$ 取值为紧集，且关于 Hausdorff 度量连续，不难看到 z_k 是有界列. 于是不妨设 z_k 收敛.

由 $M(\cdot)$ 关于 Hausdorff 度量的连续性得

$$d\big(z_k, M(\bar{t})\big) \leq 2\rho\big(M(t_k), M(\bar{t})\big) \to 0.$$

而由定理 2.7，$R(\cdot)$ 关于 Hausdorff 度量连续，从而又有

$$d\big(z_k, R(\bar{t})\big) \leq 2\rho\big(R(t_k), R(\bar{t})\big) \to 0,$$

这样就得到

$$\bar{z} \equiv \lim_{k\to\infty} z_k \in M(\bar{t}) \bigcap R(\bar{t}).$$

上式结合 (3.3) 即得 (3.4). 同时, 它表明存在 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0, +\infty)$ 使得

$$y(\bar{t}; \bar{u}(\cdot)) \in M(\bar{t}).$$

于是

$$J(\bar{u}(\cdot)) \leq \bar{t}.$$

即 $\bar{u}(\cdot)$ 是时间最优控制. □

定理 3.2 表明，在假设 $(L1)$—$(L2)$ 和 (3.1) 下，最优时间和最优控制定义中的下确界事实上都是可以取到的.

现在，我们来刻画最优时间和最优控制.

定理 3.3. 设 (L1)—(L2) 以及 (3.1) 成立，$y_0 \notin M(0)$，$\bar{t}$ 是问题(TC) 的最优时间, 则

$$\Big[\partial M(\bar{t})\Big] \bigcap \Big[\partial \mathcal{R}(\bar{t})\Big] = M(\bar{t}) \bigcap \mathcal{R}(\bar{t}) \neq \phi. \tag{3.5}$$

特别，当 $M(\cdot) = \{z(\cdot)\}$ 是单值的连续函数时，(3.5) 就变成

$$z(\bar{t}) \in \partial \mathcal{R}(\bar{t}).$$

证明. 定理在直观上是非常明显的. $\bar{t}$ 是 $M(t)$ 与 $R(t)$ 首次相交的时刻. 由于 $M(\cdot)$ 和 $R(\cdot)$ 都是按 Hausdorff 度量连续的、取值为闭集的集值函数, 自然它们首先会在边界上相遇. 下面, 我们来对此加以严格的论证.

首先, 由 (3.4) 知

$$M(\bar{t}) \bigcap \mathcal{R}(\bar{t}) \neq \phi.$$

而由于 $M(t)$ 与 $R(t)$ 都是闭集, 因而

$$\Big[\partial M(\bar{t})\Big] \bigcap \Big[\partial \mathcal{R}(\bar{t})\Big] \subseteq M(\bar{t}) \bigcap \mathcal{R}(\bar{t}).$$

这样, 如果 (3.5) 不成立，则可以找到一点

$$\bar{z} \in M(\bar{t}) \bigcap \Big[\overset{o}{\mathcal{R}}(\bar{t})\Big], \tag{3.6}$$

或

$$\bar{z} \in \Big[\overset{o}{M}(\bar{t})\Big] \bigcap \mathcal{R}(\bar{t}). \tag{3.7}$$

不妨设 (3.6) 成立. 由 $\mathcal{R}(\cdot)$ 及 $M(\cdot)$ 的连续性、凸闭性, 直观地有 $\delta>0$ 以及 $\tilde{t}\in(0,\bar{t})$ 使得

$$M(\tilde{t})\bigcap B_\delta(\bar{z})\neq\phi, \tag{3.8}$$

$$B_\delta(\bar{z})\subseteq\mathcal{R}(\tilde{t}). \tag{3.9}$$

下面我们来证明这一点. 由 (3.6), 存在 $\delta>0$ 使得

$$B_{2\delta}(\bar{z})\subseteq\mathcal{R}(\bar{t}). \tag{3.10}$$

而由 $\mathcal{R}(\cdot)$ 及 $M(\cdot)$ 的连续性, 可得 $\tilde{t}\in(0,\bar{t})$, 使得

$$\rho\Big(\mathcal{R}(\tilde{t}),\mathcal{R}(\bar{t})\Big)<\frac{\delta}{2},$$

$$\rho\Big(M(\tilde{t}),M(\bar{t})\Big)<\frac{\delta}{2}.$$

于是,

$$d(\bar{z},M(\tilde{t}))\leq 2\rho\Big(M(\tilde{t}),M(\bar{t})\Big)<\delta.$$

从而存在 $z_{\tilde{t}}\in M(\tilde{t})$ 使得 $|\bar{z}-z_{\tilde{t}}|<\delta$, 即 (3.8) 成立.

现在, 若 (3.9) 不成立, 则存在 $\zeta\in B_\delta(\bar{z})$ 使得

$$\zeta\notin\mathcal{R}(\tilde{t}).$$

由 $\mathcal{R}(\tilde{t})$ 的凸闭性以及第二章命题 1.7, 存在 $\bar{y}\in\mathcal{R}(\tilde{t})$ 使得

$$\begin{cases} |\zeta-\bar{y}|=d(\zeta,\mathcal{R}(\tilde{t})), \\ \langle\zeta-\bar{y},y-\bar{y}\rangle\leq 0, \quad \forall\, y\in\mathcal{R}(\tilde{t}). \end{cases}$$

取

$$z=\zeta+\delta\frac{\zeta-\bar{y}}{|\zeta-\bar{y}|}, \tag{3.11}$$

则

$$|z-\bar{z}|\leq|z-\zeta|+|\zeta-\bar{z}|<\delta+\delta=2\delta, \tag{3.12}$$

而且

$$\begin{cases} |z-\bar{y}| = |\zeta-\bar{y}|\left(1+\dfrac{\delta}{|\zeta-\bar{y}|}\right) > \delta, \\ \langle z-\bar{y}, y-\bar{y}\rangle \le 0, \quad \forall\, y \in \mathcal{R}(\tilde{t}). \end{cases}$$

从而由第二章命题 1.7,

$$d(z, \mathcal{R}(\tilde{t})) = |z-\bar{y}| > \delta. \tag{3.13}$$

另一方面, 由 (3.10) 以及 (3.12) 得, $z \in B_{2\delta}(\bar{z}) \subseteq \mathcal{R}(\bar{t})$. 于是

$$d(z, \mathcal{R}(\tilde{t})) \le 2\rho(\mathcal{R}(\bar{t}), \mathcal{R}(\tilde{t})) < \delta.$$

这与 (3.13) 矛盾. 因此，(3.9) 成立. 由 (3.8) 及 (3.9) 知

$$M(\tilde{t}) \bigcap \mathcal{R}(\tilde{t}) \ne \phi.$$

注意到 $0 < \tilde{t} < \bar{t}$, 因而 $\bar{t}$ 不是最优时间. 与假设矛盾. 因此 (3.5) 成立. □

定理 3.4. 设(L1)—(L2) 及 (3.1) 成立，$y_0 \notin M(0)$, 则最优时间 $\bar{t}$ 是以下函数在 $[0, +\infty)$ 上的最小零点.

$$F(t) = \inf_{|\lambda|=1} \Big\{ \max_{z \in M(t)} \langle \lambda, \Phi(t,0)y_0 - z\rangle + \int_0^t \max_{u \in U} \langle \lambda, \Phi(t,s)B(s)u\rangle \,\mathrm{d}s \Big\}. \tag{3.14}$$

进一步，如果 $|\lambda_0| = 1$ 满足

$$\max_{z \in M(\bar{t})} \langle \lambda_0, \Phi(\bar{t},0)y_0 - z\rangle + \int_0^{\bar{t}} \max_{u \in U} \langle \lambda_0, \Phi(\bar{t},s)B(s)u\rangle \,\mathrm{d}s = 0, \tag{3.15}$$

则最优控制 $\bar{u}(\cdot)$ 满足以下**最大值条件**:

$$\max_{u \in U} \langle \lambda_0, \Phi(\bar{t},s)B(s)u\rangle = \langle \lambda_0, \Phi(\bar{t},s)B(s)\bar{u}(s)\rangle, \quad \text{a.e. } s \in [0, \bar{t}], \tag{3.16}$$

而 $\bar{y} \equiv y(\bar{t};\bar{u}(\cdot))$ 满足如下**横截条件**:

$$\langle \lambda_0, z - \bar{y} \rangle \geq 0, \qquad \forall\, z \in M(\bar{t}). \tag{3.17}$$

证明. 首先我们来看 (3.14) 右端的含义. 利用 Fillipov 引理，可以取到 $\hat{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0,+\infty)$ 满足

$$\max_{u \in U} \langle \lambda, \Phi(t,s)B(s)u \rangle = \langle \lambda, \Phi(t,s)B(s)\hat{u}(s) \rangle, \quad \text{a.e. } s \in [0,t].$$

由此可见

$$\int_0^t \max_{u \in U} \langle \lambda, \Phi(t,s)B(s)u \rangle \, \mathrm{d}s = \max_{u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,t]} \int_0^t \langle \lambda, \Phi(t,s)B(s)u(s) \rangle \, \mathrm{d}s.$$

于是

$$\begin{aligned}
& F(t) \\
= \; & \inf_{|\lambda|=1} \Big\{ \max_{z \in M(t)} \langle \lambda, \Phi(t,0)y_0 - z \rangle \\
& \qquad + \max_{u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,t]} \int_0^t \langle \lambda, \Phi(t,s)B(s)u(s) \rangle \, \mathrm{d}s \Big\} \\
= \; & \inf_{|\lambda|=1} \Big\{ \max_{z \in M(t), u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,t]} \Big\langle \lambda, \Phi(t,0)y_0 \\
& \qquad + \int_0^t \Phi(t,s)B(s)u(s) \, \mathrm{d}s - z \Big\rangle \Big\} \\
= \; & \inf_{|\lambda|=1} \Big\{ \max_{z \in M(t), y \in \mathcal{R}(t)} \langle \lambda, y - z \rangle \Big\} \\
= \; & \inf_{|\lambda|=1} \Big\{ \max_{y \in \mathcal{R}(t) - M(t)} \langle \lambda, y \rangle \Big\}.
\end{aligned}$$

这样，当 $0 \notin \mathcal{R}(t) - M(t)$ 时，由第二章定理 1.8，存在 $\lambda \in \mathbb{R}^n$，$|\lambda| = 1$，以及 $c = c_t < 0$ 使得

$$0 > c \geq \langle \lambda, y \rangle, \qquad \forall\, y \in \mathcal{R}(t) - M(t).$$

从而此时 $F(t) \le c < 0$.

而当 $0 \in \mathcal{R}(t) - M(t)$ 时，对任何 $\lambda \in \mathbb{R}^n, |\lambda| = 1$,

$$\max_{y \in \mathcal{R}(t) - M(t)} \langle \lambda, y \rangle \ge 0.$$

从而此时 $F(t) \ge 0$.

由定理 3.2 知最优控制存在. 对于最优时间 $\bar{t}$, 我们有

$$\mathcal{R}(\bar{t}) \bigcap M(\bar{t}) \ne \phi.$$

亦即 $0 \in \mathcal{R}(\bar{t}) - M(\bar{t})$. 于是上面的讨论表明

$$\begin{cases} F(t) < 0, & \forall\, t \in [0, \bar{t}), \\ F(\bar{t}) \ge 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

另一方面，易见函数 $F(\cdot)$ 是连续的. 这样，由 (3.18) 得

$$F(\bar{t}) = 0.$$

即 $\bar{t}$ 是 $F(\cdot)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小零点.

现在设 $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$, $|\lambda_0| = 1$ 满足 (3.15). 记最优控制为 $\bar{u}(\cdot)$, 则

$$\bar{y} \equiv y(\bar{t}; \bar{u}(\cdot)) = \Phi(\bar{t}, 0) y_0 + \int_0^{\bar{t}} \Phi(\bar{t}, s) B(s) \bar{u}(s)\ \mathrm{d}s \in M(\bar{t}) \bigcap \mathcal{R}(\bar{t}).$$

于是利用 (3.15) 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{z \in M(\bar{t})} \langle \lambda_0, \Phi(\bar{t}, 0) y_0 - z \rangle + \int_0^{\bar{t}} \max_{u \in U} \langle \lambda_0, \Phi(\bar{t}, s) B(s) u \rangle\ \mathrm{d}s \\ &\ge \langle \lambda_0, \Phi(\bar{t}, 0) y_0 - \bar{y} \rangle + \int_0^{\bar{t}} \langle \lambda_0, \Phi(\bar{t}, s) B(s) \bar{u}(s) \rangle\ \mathrm{d}s \\ &= 0. \end{aligned}$$

这表明

$$\max_{z\in M(\bar{t})}\langle\lambda_0,\Phi(\bar{t},0)y_0-z\rangle=\langle\lambda_0,\Phi(\bar{t},0)y_0-\bar{y}\rangle, \tag{3.19}$$

且

$$\int_0^{\bar{t}}\Big\{\max_{u\in U}\langle\lambda_0,\Phi(\bar{t},s)B(s)u\rangle-\langle\lambda_0,\Phi(\bar{t},s)B(s)\bar{u}(s)\rangle\Big\}\,\mathrm{d}s=0. \tag{3.20}$$

由于 (3.20) 中被积函数是非负的，我们就得到最大值条件 (3.16). 而由 (3.19) 可见横截条件 (3.17) 成立. □

如果我们记

$$\psi(t)=\Phi(\bar{t},t)^\top\lambda_0,\qquad t\in[0,\bar{t}],$$

则 $\psi(\cdot)$ 满足

$$\begin{cases}\dot{\psi}(t)=-A(t)^\top\psi(t), & t\in[0,\bar{t}],\\ \psi(\bar{t})=\lambda_0.\end{cases} \tag{3.21}$$

这个系统称为 (1.1) 的共轭方程. 利用函数 $\psi(\cdot)$, 我们可以将最大值条件 (3.16) 重写成

$$\max_{u\in U}\langle\psi(t),B(t)u\rangle=\langle\psi(t),B(t)\bar{u}(t)\rangle,\quad \text{a.e. } t\in[0,\bar{t}]. \tag{3.22}$$

而横截条件 (3.17) 化为

$$\langle\psi(\bar{t}),z-\bar{y}\rangle\geq 0,\qquad \forall\, z\in M(\bar{t}). \tag{3.23}$$

这样，我们就得到:

定理 3.5. (**最大值原理**) 设 (L2) 成立, $\bar{u}(\cdot)$ 是问题 (TC) 的最优控制, $\bar{t}>0$ 是最优时间, 则存在 (3.21) 的非零解 $\psi(\cdot)$ 使得最大值条件 (3.22) 和横截条件 (3.23) 成立.

定理 3.6. (**bang-bang 原理**) 设 (L2) 和 (3.1) 成立, 则存在最优控制 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0,\bar{t}]$ 使得

$$\bar{u}(t) \in \partial U, \qquad \text{a.e. } t \in [0,\bar{t}]. \tag{3.24}$$

当 $U=[0,1]$ 时, (3.24) 意味着

$$\bar{u}(t) = 0 \quad \text{或} \quad 1, \qquad \text{a.e. } t \in [0,\bar{t}].$$

这就是说，$\bar{u}(t)$ 只取值 0 或 1. 物理上，这通常表示控制器可以是简单的开关;“开”或“关”构成了控制行为. 这就是为什么我们称定理 3.6 为 bang-bang 原理的一个原因. 今后，我们称满足 (3.24) 的控制为 **bang-bang 控制**.

证明. 记

$$\begin{aligned}
\mathscr{W}[0,+\infty) &= \{w(\cdot) \in L^\infty_{loc}[0,+\infty;\mathbb{R}^m) \big| w(t) \in \partial U, \text{ a.e. }\}, \\
\mathscr{V}[0,+\infty) &= \{v(\cdot) \in L^\infty_{loc}[0,+\infty;\mathbb{R}^m) \big| v(t) \in \operatorname{co}(\partial U), \text{ a.e. }\}.
\end{aligned}$$

由于

$$\partial U \subseteq U \subseteq \operatorname{co}(\partial U) = \operatorname{co} U,$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(t) &\triangleq \Big\{ y(t; w(\cdot)) \Big| w(\cdot) \in \mathscr{W}[0,+\infty) \Big\} \subseteq \mathcal{R}(t) \\
&\subseteq \mathcal{S}(t) \triangleq \Big\{ y(t; v(\cdot)) \Big| v(\cdot) \in \mathscr{V}[0,+\infty) \Big\}.
\end{aligned}$$

从定理 2.3 的证明可见

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{S}(t), \qquad t \geq 0.$$

从而

$$\mathcal{Q}(t) = \mathcal{R}(t), \qquad \forall\ t \geq 0.$$

这样对于最优控制 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0,\bar{t}]$, 存在 $\bar{w}(\cdot) \in \mathscr{W}[0,\bar{t}]$, 使得

$$y(\bar{t};\bar{u}(\cdot)) = y(\bar{t};\bar{w}(\cdot)).$$

显然，$\bar{w}(\cdot)$ 是一个 bang-bang 控制，它还是最优的. □

在上面的讨论中，初始状态是固定的. 当初始状态允许在一个有界凸闭集中变动时，我们可以建立相应的结果.

定理 3.7. 设 (L2) 成立, Q, $M(t)$ $(t \in [0,+\infty))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空凸闭集. 假设 $\bar{t} > 0$ 是将状态从 Q 转移到 $M(\cdot)$ 的最优时间, 即

$$\bar{t} \;=\; \inf\{t \geq 0 \big| y(t;y_0,u(\cdot)) \in M(t), y_0 \in Q, u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,+\infty)\ \}.$$

又设 $\bar{u}(\cdot)$ 是最优控制, $\bar{y}_0 \in Q$ 和 $\bar{y} \in M(\bar{t})$ 分别是相应的最优轨线在 0 时刻和 $\bar{t}$ 时刻的状态, 则存在 (3.21) 的非零解 $\psi(\cdot)$ 使得最大值条件 (3.22), 关于终端的横截条件 (3.23) 和以下关于初始状态的横截条件成立.

$$\langle \psi(0), y_0 - \bar{y}_0 \rangle \leq 0, \qquad \forall\ y_0 \in Q. \tag{3.25}$$

证明. 把

$$\tilde{y}(t) = y(t;y_0) - \Phi(t,0)y_0, \qquad t > 0$$

看作新的状态变量,

$$\widetilde{M}(t) \triangleq M(t) - \Phi(t,0)Q = \{z - \Phi(t,0)y_0 \big| z \in M(t), y_0 \in Q\}$$

看作新的目标, 则易见 $\bar{t}$ 和 $\bar{u}(\cdot)$ 就是相应的初始状态固定为 0 的时间最优控制问题的最优时间和最优控制. 而相应的状态轨线在 $\bar{t}$ 的终端状态为 $\bar{y} - \Phi(\bar{t},0)\bar{y}_0$. 容易验证定理 3.5 的条件满足, 从而

有 (3.21) 的非零解 $\psi(\cdot)$ 使得最大值条件 (3.22) 满足，而关于终端的横截条件变为

$$\langle\psi(\bar{t}), z-\Phi(\bar{t},0)y_0-(\bar{y}-\Phi(\bar{t},0)\bar{y}_0)\rangle \geq 0, \quad \forall\ z\in M(\bar{t}),\ y_0\in Q.$$

在上式中取 $y_0=\bar{y}_0$ 即得 (3.23). 而取 $z=\bar{y}\in M(\bar{t})$ 则得

$$\langle\psi(\bar{t}), \Phi(\bar{t},0)y_0-\Phi(\bar{t},0)\bar{y}_0\rangle \leq 0, \qquad \forall\ y_0\in Q.$$

从而

$$\begin{aligned} & \langle\psi(0), y_0-\bar{y}_0\rangle = \langle(\Phi(\bar{t},0))^\top\psi(\bar{t}), y_0-\bar{y}_0\rangle \\ = \ & \langle\psi(\bar{t}), \Phi(\bar{t},0)y_0-\Phi(\bar{t},0)\bar{y}_0\rangle \leq 0, \qquad \forall\ y_0\in Q. \end{aligned}$$

这样，就得到关于最优初始状态的横截条件 (3.25). □

例 3.1. 设 $H>0$, 讨论把系统

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=u(t), \qquad |u(t)|\leq 1, \tag{3.26}$$

从状态 $(-H,0)$ 最快地转移到状态 $(0,0)$ 的时间最优控制.

我们用最大值原理来分析这一问题. 记 $y=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, 我们有

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t). \tag{3.27}$$

(3.27) 的共轭方程是

$$\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}.$$

解得

$$\varphi(t)=C_1, \quad \psi(t)=C_2-C_1t,$$

其中 C_1, C_2 为常数. 设 $\bar{u}(\cdot)$ 为所求的时间最优控制. 由最大值原理，存在不全为零的常数 C_1, C_2 使得

$$\max_{u\in[-1,1]}\Big[(C_2 - C_1 t)u\Big] = (C_2 - C_1 t)\bar{u}(t), \quad \text{a.e. } [0, \bar{t}].$$

从而

$$\bar{u}(t) = \text{ sgn }(C_2 - C_1 t), \quad \text{a.e. } [0, \bar{t}].$$

由于 $(C_2 - C_1 t)$ 至多只有一个零点，因此，在几乎处处意义下，最优控制 $\bar{u}(\cdot)$ 只取值为 1 和 -1，而且它至多改变一次符号.

如果最优控制在轨线到达 $(0,0)$ 前的一段取值为 1, 状态的相轨线为

$$L_1: \quad y = -\sqrt{2x}, \quad x \geq 0,$$

且走向是 y 增加的方向.

如果最优控制在轨线到达 $(0,0)$ 前的一段取值为 -1, 则状态的相轨线为

$$L_2: \quad y = \sqrt{-2x}, \quad x \leq 0,$$

且走向是 y 减少的方向. 因此，最优轨线的相轨线必定与 L_1 或 L_2 相交. 假如 $\bar{u}(\cdot)$ 在开始时取值为 -1，则状态在这一段的相轨线为

$$L3: \quad y = -\sqrt{-2(x+H)}$$

的一段. 注意到 L_3 不可能与 L_1 或 L_2 相交，最优控制必然在开始时取值为 1. 此时，

$$L4: \quad y = \sqrt{2(x+H)}.$$

当 L_4 与 L_2 相交时，$\bar{u}(\cdot)$ 的值改变为 -1. 由此可以求出:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq t < \sqrt{H}, \\ -1, & \text{当 } \sqrt{H} \leq t \leq 2\sqrt{H}, \end{cases} \tag{3.28}$$

这里我们假定初始时刻为 0. 而最优时间是

$$\bar{t} = 2\sqrt{H}.$$

而这正是我们在第一章中得到的结果.

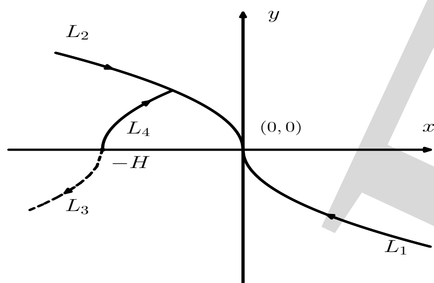


图 3.1

一般地，令

$$v(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } (x,y)\text{在 } L_1, L_2 \text{ 的下方或 } L_1 \text{ 上}, \\ -1, & \text{当 } (x,y)\text{在 } L_1, L_2 \text{ 的上方或 } L_2 \text{ 上}, \end{cases} \tag{3.29}$$

则系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

的轨线都是系统 (3.26) 最快到达 (0,0) 的最优轨线. 这里请读者注意的是，尽管在数学上，(3.29) 与 (3.28) 得到的同样都是最优控制. 但是 (3.29) 具有**状态反馈**形式, 在实际应用中将更为有用. 特别，利用 (3.29) 计算最优控制会更具有抗干扰性. 在这个例题中，我们利用对开环问题 (最优控制问题) 的研究结果得到了闭环问题 (反馈最优控制问题) 的解，也是非常有意义的.

§4. 时间最优控制的惟一性

在这一节中，我们考虑时间最优控制的惟一性. 考察以下时不变系统:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \qquad t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. 进一步，假设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个**凸多面体**:

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m \Big| \langle \lambda_i, u\rangle \leq c_i,\ 1 \leq i \leq k\},$$

其中 $\lambda_i \in \mathbb{R}^m$, $c_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq k)$ 是给定的.

定义 4.1. 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个有界凸多面体, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. 如果对于平行于 U 的某一条棱的非零向量 $w \in \mathbb{R}^m$, 向量组

$$Bw, ABw, \cdots, A^{n-1}Bw$$

总是线性无关的, 就称 U 与 A, B 处于**最广位置**.

当 $m = 1$, $U = [-1, 1]$, $B \in \mathbb{R}^n$ 时，U 与 A, B 处于最广位置当且仅当

$$B, AB, \cdots, A^{n-1}B$$

是线性无关的，即系统 (4.1) 是完全能控的. 下面的定理表明，在前述条件下，当 $\psi(\cdot)$ 确定时，最大值条件 (3.16) 惟一地确定了一个控制:

定理 4.2. 设 U 与 A, B 处于最广位置. $\psi(\cdot) \neq 0$ 是系统 (4.1) 的共轭方程

$$\dot{\psi}(t) = -A^\top \psi(t), \quad t \in [0, T]$$

的解, 则在 $[0, T]$ 上除了有限个点外, 最大值条件

$$\langle \psi(t), Bu(t)\rangle = \max_{v\in U}\langle \psi(t), Bv\rangle, \quad t \in [0, T] \tag{4.2}$$

惟一地确定了 $u(t)$，并且 $u(\cdot)$ 在 $[0,T]$ 上是一个取值于 U 的顶点的逐段常值函数.

证明. 对于固定的 $t\in[0,T]$, $\langle\psi(t),Bv\rangle$ 是 $v\in U$ 的线性函数. 如果它在 U 上不是常值的，则仅在 U 的边界上取得最大值. 同理，可以进一步证明 $\langle\psi(t),Bv\rangle$ 或者仅在 U 的某个顶点达到最大值，或者在 U 的某一条棱上取常值.

我们首先来证明，除去有限个点以外，由 (4.2) 确定的 $u(t)$ 是惟一的.

否则，存在无限个不同的 $t_1,t_2,\cdots\in[0,T]$ 使得 $t=t_k$ 时 $(k=1,2,\cdots)$, 由 (4.2) 确定的 $u(t_k)$ 不是惟一的. 此时，$\langle\psi(t_k),Bv\rangle$ 必在 U 的某一条棱上取常值. 设 u_{k1},u_{k2} 是该棱的两个顶点. 记 $w_k=u_{k2}-u_{k1}$, 则

$$\langle\psi(t_k),Bw_k\rangle=\langle\psi(t_k),Bu_{k2}\rangle-\langle\psi(t_k),Bu_{k1}\rangle=0.$$

注意到 U 只有有限条棱，因而至少有无限个 k_j 对应了同一个向量 $w\equiv w_{k_j}$. 即:

$$\langle\psi(t_{k_j}),Bw\rangle=0. \tag{4.3}$$

由于 $\psi(\cdot)$ 是常系数线性微分方程组的解，所以 $\langle\psi(t),Bw\rangle$ 是变量 t 的解析函数. 由解析函数的零点孤立性定理及 (4.3) 可知:

$$\langle\psi(t),Bw\rangle\equiv0,\qquad\forall\,t\in[0,T].$$

对上式关于 t 求直到 $n-1$ 阶的导数，即得

$$\begin{aligned}&\langle\psi(t),Bw\rangle\equiv0,\\&\langle\psi(t),ABw\rangle\equiv0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\langle\psi(t),A^{n-1}Bw\rangle\equiv0,\qquad\forall\,t\in[0,T].\end{aligned}$$

由假设，$Bw, ABw, \cdots, A^{n-1}Bw$ 线性无关，从而

$$\psi(t) \equiv 0, \qquad \forall\ t \in [0, 1].$$

这与 $\psi(\cdot) \neq 0$ 矛盾．这就证明了除去有限个点以外，(4.2) 惟一地确定了 $u(t)$．而且，这些被惟一确定的 $u(t)$ 的值一定是 U 的顶点．

下面，我们来证明 $u(\cdot)$ 是逐段常值的．

设 $\hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \cdots < \hat{t}_N \in [0, T]$ 是那些不能由 (4.2) 惟一地确定 $u(t)$ 的 t．任取 $J = (\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})$ $(1 \le k \le N-1)$．设 $e_1, e_2, \cdots, e_q$ 为 U 的全部顶点．记

$$E_j = \{t \in J | \langle \psi(t), Be_j \rangle > \langle \psi(t), Be_k \rangle,\ \forall\ k \neq j\}. \tag{4.4}$$

由于对 $t \in J$，(4.2) 惟一地确定 $u(t) \in \{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$，从而

$$J = \bigcup_{j=1}^{q} E_j.$$

另一方面，对任何 k, j,

$$\langle \psi(t), Be_j \rangle - \langle \psi(t), Be_k \rangle$$

关于 t 是连续的．因此，对每个 $j = 1, 2, \cdots, q$, E_j 是开集．注意到 E_j 两两不交，由 (4.4) 以及 J 是连通开集，可知 E_j 中有且只有一个是非空的．这就是说，在 J 上，$u(\cdot)$ 取常值． □

上述定理表明，当 U 和 A, B 处于最广位置时，满足最大值条件的控制，特别是最优控制，一定是逐段常值的, 其取值为有界凸多面体的顶点，而且取值的改变次数为有限次．

需要注意的是，在上述定理中，所谓 (4.2) 惟一地确定 $u(t)$(除去有限个点) 是在 $\psi(\cdot)$ 给定的前提下得到的．因而还不能由此得到最优控制的惟一性．下面的定理表明了在一定条件下，时间最优控制是惟一的．

定理 4.3. 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个有界凸多面体, U 与 A, B 处于最广位置, 则系统 (4.1) 从状态 y_0 最快移到状态 y_1 的时间最优控制是惟一的.

证明. 设 $\bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot) \in \mathscr{U}[0,\bar{t}]$ 都是用最优时间 $\bar{t} > 0$ 将系统 (4.1) 从状态 y_0 转移到 y_1 的最优控制, 从而

$$\begin{cases} y_1 = \mathrm{e}^{\bar{t}A} y_0 + \displaystyle\int_0^{\bar{t}} \mathrm{e}^{(\bar{t}-s)A} B\bar{u}(s)\ \mathrm{d}s, \\ y_1 = \mathrm{e}^{\bar{t}A} y_0 + \displaystyle\int_0^{\bar{t}} \mathrm{e}^{(\bar{t}-s)A} B\bar{v}(s)\ \mathrm{d}s. \end{cases}$$

因此,

$$\int_0^{\bar{t}} \mathrm{e}^{(\bar{t}-s)A} B\bar{u}(s)\ \mathrm{d}s = \int_0^{\bar{t}} \mathrm{e}^{(\bar{t}-s)A} B\bar{v}(s)\ \mathrm{d}s. \tag{4.5}$$

由于 $\bar{u}(\cdot)$ 是最优控制，因而，由定理 3.5, 存在 $\lambda_0 \neq 0$ 以及系统 (4.1) 的共轭方程

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A^\top \psi(t), \quad t \in [0,\bar{t}], \\ \psi(\bar{t}) = \lambda_0, \end{cases} \tag{4.6}$$

的解 $\psi(\cdot)$ 使得

$$\langle \psi(t), B\bar{u}(t)\rangle = \max_{v\in U} \langle \psi(t), Bv\rangle, \quad \text{a.e. } t \in [0,\bar{t}].$$

注意到

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{(\bar{t}-t)A^\top} \lambda_0, \qquad t \in [0,\bar{t}],$$

结合 (4.5) 可得

$$\begin{aligned} &\int_0^{\bar{t}} \langle \psi(t), B\bar{v}(t)\rangle\ \mathrm{d}t = \int_0^{\bar{t}} \langle \lambda_0, \mathrm{e}^{(\bar{t}-t)A} B\bar{v}(t)\rangle\ \mathrm{d}t \\ = &\int_0^{\bar{t}} \langle \lambda_0, \mathrm{e}^{(\bar{t}-t)A} B\bar{u}(t)\rangle\ \mathrm{d}t = \int_0^{\bar{t}} \langle \psi(t), B\bar{u}(t)\rangle\ \mathrm{d}t \\ = &\int_0^{\bar{t}} \max_{v\in U} \langle \psi(t), Bv\rangle\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \langle\psi(t), B\bar{v}(t)\rangle &= \max_{v\in U}\langle\psi(t), Bv\rangle \\ &= \langle\psi(t), B\bar{u}(t)\rangle, \quad \text{a.e. } t\in[0,\bar{t}]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

于是，由 (4.7) 以及定理 4.2 得到

$$\bar{u}(t)=\bar{v}(t), \qquad \text{a.e. } t\in[0,\bar{t}].$$

这就证明了时间最优控制的惟一性. □

定义 4.4. 设 $\psi(\cdot)$ 是方程 (4.1) 的共轭方程 (4.6) 的非零解. 称满足最大值条件

$$\langle\psi(t), Bu(t)\rangle = \max_{v\in U}\langle\psi(t), Bv\rangle \tag{4.8}$$

的控制 $u(\cdot)\in\mathscr{U}$ 为**极值控制**.

我们已经知道最优控制是极值控制. 在更强的条件下，我们也可以证明极值控制是最优控制.

定理 4.5. 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个有界凸多面体, U 与 A, B 处于最广位置, 且 $0\in\overset{o}{U}$, 则系统 (4.1) 从状态 y_0 转移到状态 0 的极值控制是惟一的. 特别，这一极值控制必然是最优控制.

证明. 设 $u(\cdot), \tilde{u}(\cdot)$ 是将系统从 y_0 移到 0 的两个极值控制, 则存在 $T, S\in[0,+\infty)$(不妨设 $T\geq S$) 使得:

$$\begin{aligned} 0 &= e^{TA}y_0+\int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)\,dt, \\ 0 &= e^{SA}y_0+\int_0^S e^{(S-t)A}B\tilde{u}(t)\,dt. \end{aligned}$$

从而

$$-y_0 = \int_0^T \mathrm{e}^{-tA} Bu(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^S \mathrm{e}^{-tA} B\tilde{u}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{4.9}$$

设 $\psi(\cdot)$ 是方程 (4.6) 的非平凡解，它使 $u(\cdot)$ 在 $[0,T]$ 上满足最大值条件 (4.8), 则由 (4.9), 可证:

$$\begin{aligned}
&\int_0^S \langle \psi(t), B\tilde{u}(t)\rangle\ \mathrm{d}t = \int_0^S \langle \psi(0), \mathrm{e}^{-tA} B\tilde{u}(t)\rangle\ \mathrm{d}t \\
= &\int_0^T \langle \psi(0), \mathrm{e}^{-tA} Bu(t)\rangle\ \mathrm{d}t = \int_0^T \langle \psi(t), Bu(t)\rangle\ \mathrm{d}t \\
= &\int_0^T \max_{v\in U} \langle \psi(t), Bv\rangle\ \mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

由于 $0 \in U$, 因而

$$\max_{v\in U} \langle \psi(t), Bv\rangle \geq 0,$$

由此由 (4.10) 及 $T \geq S$ 得

$$\int_0^S \langle \psi(t), B\tilde{u}(t)\rangle\ \mathrm{d}t \geq \int_0^S \max_{v\in U} \langle \psi(t), Bv\rangle\ \mathrm{d}t.$$

于是

$$\langle \psi(t), B\tilde{u}(t)\rangle = \max_{v\in U} \langle \psi(t), Bv\rangle, \qquad \text{a.e. } t \in [0,S].$$

由定理 4.2 得

$$u(t) = \tilde{u}(t), \qquad \text{a.e. } t \in [0,S]. \tag{4.11}$$

上式结合 (4.10, 并注意到 $u(\cdot)$ 和 $\psi(\cdot)$ 满足最大值条件 (4.8), 可得

$$\langle \psi(t), Bu(t)\rangle = \max_{v\in U} \langle \psi(t), Bv\rangle = 0, \qquad \text{a.e. } t \in [S,T]. \tag{4.12}$$

我们断言 $T = S$. 否则 $T > S$. 由定理 4.2, (4.12) 式几乎处处惟一确定了 $u(\cdot)$ 在 $[S,T]$ 上的值, 且其值为 U 的边界点. 由惟一性可得

$$u(t) = 0, \qquad \text{a.e. } t \in [S,T].$$

但 $0 \in \overset{o}{U}$, 这与 $u(\cdot)$ 取值为 U 的边界点矛盾. 因而 (4.12) 蕴涵了 $T=S$. 至此，我们证明了 $T=S$ 以及 $u(\cdot)=\tilde{u}(\cdot)$. □

注记

1. 在英文文献中，与能达集相关的有两个词：“attainable set”和“reachable set”. 通常, 前者与本章中介绍的概念一致，后者为

$$\widetilde{\mathcal{R}}^p(T;t_0,y_0) \triangleq \bigcup_{t\in[t_0,T]} \mathcal{R}^p(t;t_0,y_0).$$

对于 $\widetilde{\mathcal{R}}^p(T;t_0,y_0)$, 相应于命题 2.1、定理 2.2 的结果一般不真.

2. 由所有轨线组成的集合

$$\{y(\cdot;t_0,y_0,u(\cdot))|u(\cdot)\in\mathscr{U}^p\}$$

并不一定是凸的. 例如考虑 $U=\{-1,1\}$ 以及系统

$$\dot{y}(t)=u(t), \qquad t\in[0,T],$$

则 $y(t)\equiv -t$ 和 $y(t)\equiv t$ 是相应于 $u\equiv -1$ 和 $u\equiv 1$ 的两条状态轨线. 但是它们的凸组合 $y(t)\equiv 0$ 并不是系统的一条状态轨线.

3. 如果控制区域 U 是有界集，则对于任何 $p\in[1,+\infty]$, $\mathscr{U}^p[t_0,T]$ 都是相同的，从而能达集 $\mathcal{R}^p(T)$ 也是相同的. 当 U 无界时，情况又会如何? 此时，即使对于时不变的线性系统，$\mathcal{R}^p(T)$ 也确实可以随着 p 的变化而变化. 请看下例：

设 $T=\pi/4$, $1\le r\le +\infty$. 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{y}(t)=Ay(t)+u(t), & 0\le t\le T,\\ y(0)=0, \end{cases}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$U=\left\{\begin{pmatrix}\varphi(s)\\ s\end{pmatrix}\,\middle|\, s\in[1,+\infty)\right\},$$

这里

$$\varphi(s)=\begin{cases}1/\ln(2s), & \text{如果 } r=1,\\ 2/[(r-1)s^{r-1}], & \text{如果 } 1<r<+\infty,\\ 3\exp(-s), & \text{如果 } r=+\infty.\end{cases}$$

这样

$$\begin{aligned}y(T;u(\cdot)) &= \int_0^{\pi/4}\begin{pmatrix}\cos(\pi/4-t) & \sin(\pi/4-t)\\ -\sin(\pi/4-t) & \cos(\pi/4-t)\end{pmatrix}u(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/4}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}u(\pi/4-t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对于固定的 $t\in(0,\pi/4]$, 不难验证

$$\varphi'(1)\cos t+\sin t\le[\varphi'(1)+1]\cos t<0,$$

以及

$$\lim_{s\to+\infty}\Big(\varphi(s)\cos t+s\sin t\Big)=+\infty.$$

这样

$$\varphi(s)\cos t+s\sin t$$

在 $[1,+\infty)$ 上的最小值一定在 $(1,+\infty)$ 内的某一点 s 达到，而且

$$\varphi'(s)=-\tan t.$$

由于 $\varphi''(s)>0$, 上述方程有惟一解 $s=s(t)$. 令

$$\bar u(t)=\begin{pmatrix}\varphi(s(\pi/4-t))\\ s(\pi/4-t)\end{pmatrix},\qquad \forall\ t\in(0,\pi/4],$$

则

$$\bar u(t)\in U,\qquad \forall\ t\in(0,\pi/4].$$

进一步，不难证明

$$\bar u(\cdot)\in\mathscr{U}^q \Longleftrightarrow \begin{cases} q=1, & \text{如果 } r=1,\\ 1\le q<r, & \text{如果 } 1<r\le+\infty,\end{cases}$$

以及 $\bar u(\cdot)$ 是方程

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\bar u(\pi/4-t)\right\rangle\\ =\ &\min_{u\in U}\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}u\right\rangle,\end{aligned}$$

的惟一解，或等价地，$\bar{u}(\cdot)$ 是

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y(T;\bar{u}(\cdot)) \right\rangle = \min_{u(\cdot)\in\mathscr{U}^1} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y(T;u(\cdot)) \right\rangle,$$

的惟一解. 这表明对于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}^1$,

$$y(T;u(\cdot)) = y(T;\bar{u}(\cdot)) \Longleftrightarrow u(\cdot) = \bar{u}(\cdot), \qquad \text{a.e. } [0,T].$$

从而

$$y(T;\bar{u}(\cdot)) \in \mathcal{R}^q \Longleftrightarrow \bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}^q.$$

另一方面，易见

$$\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}^q \Longleftrightarrow \begin{cases} q = 1, & \text{如果 } r = 1, \\ 1 \le q < r, & \text{如果 } 1 < r \le +\infty. \end{cases}$$

因此当 $r=1$ 时，如果 $q = 1 < p \le +\infty$，或当 $1 < r \le +\infty$ 时，如果 $1 \le q < r \le p \le +\infty$，我们便一定有 $\mathcal{R}^q \ne \mathcal{R}^p$.

4. 如果对于 $q\in[1,+\infty]$, 在 q 的附近 $\mathcal{R}^p$ 发生变化，确切地讲，如果

$$\begin{cases} \mathcal{R}^p \ne \mathcal{R}_q, & \forall\, p \ne q, & \text{如果 } q = 1, +\infty, \\ \mathcal{R}^r \ne \mathcal{R}^s, & \forall\, 1 \le r < q < s \le +\infty, & \text{如果 } q \in (1,+\infty), \end{cases}$$

则称 q 是一个临界指数. 前面的例子表明对于线性定常系统，$[1,+\infty]$ 中的任何一个值都可能成为临界指数，但是另一方面，在 [33] 中，我们证明了对于二阶线性定常系统 (A, B 均为 2×2 矩阵，U 为 $\mathbb{R}^2$ 的子集)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), & 0 \le t \le T, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

临界指数的个数不会超过 12 个. 特别当 B 是奇异阵 (即 B 的秩小于 2) 时，临界指数的个数为零，也就是说此时无论 U 是什么，所有的 $\mathcal{R}^p$ 都是相同的. 而当 A 具有一对复根 $a\pm bi$ $(b>0)$，$T > \frac{\pi}{b}$ 时，临界指数的个数也为零.

习题

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}_{n\times m},$$

$B_n \ne 0$. 证明 (1.5) 成立.

2. 考虑 $\mathbf{R}^2$ 中的控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + u(t). \end{cases}$$

该系统是否完全能控？为什么？

3. 对于以下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{y}(t) = u(t), \\ x(0) = y(0) = 0, \qquad U = \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

试对 $t \in [0, 4]$ 确定能达集 $\mathcal{R}(t)$.

4. 考虑

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + b(t, u(t)), \qquad t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

其中 U 是 $\mathbf{R}^m$ 中的有界闭集，$A(\cdot) : [t_0, T] \to \mathbf{R}^{n \times n}$ 可积. 对于任何 $t \in [t_0, T]$, $b(t, \cdot) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ 连续. 对任何 $u \in U$, $b(\cdot, u) : [t_0, T] \to \mathbf{R}^n$ 可积. 而且对任何有界集 $K \subset \mathbf{R}^k$, 存在可积的 $\mu(\cdot) : [t_0, T] \to \mathbf{R}$ 使得

$$|b(t, u)| \leq \mu(t).$$

试对上述系统证明相应的能达集是凸紧集.

5. 试构造例子使得定义 1.2 中，(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iv) 不真.

6. 证明命题 1.4.

7. 称系统 (1.1) 在 $[t_0, +\infty)$ 上完全能控，如果对任何 $y_0, y_1 \in \mathbf{R}^n$, 存在 $t_1 \geq t_0$ 以及 $u(\cdot) \in \mathscr{U}^p[t_0, +\infty)$ 使得

$$y(t_1; t_0, y_0, u(\cdot)) = y_1.$$

(i) 试举一例说明对于定常系统，按上述定义的完全能控性不能推出通常意义下的完全能控性.
(ii) 如果两个互不相关的小系统按定义 1.2 是完全能控的，则将这两个小系统合起来看作一个大系统时，该大系统仍是完全能控的. 举例说明这一结论对我们刚刚定义的完全能控性不真.

8. 讨论把系统

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = u(t),$$
$$|u(t)| \leq 1,$$

从 $(y_0, \dot{y}_0)$ 转移到 $(0, 0)$ 的时间最优控制.

9. 对于系统

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = u(t), \quad |u(t)| \le 1,$$

讨论最快击中目标集 $y = 0$ 的时间最优控制.

10. 对于系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + u(t),$$
$$|u(t)| \le 1,$$

讨论最快击中目标集

$$x^2 + y^2 \le 1$$

的时间最优控制问题.

11. 对于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y + u(t), \\ \dot{y} = -x + v(t), \end{cases}$$
$$|u(t)| \le 1, \qquad |v(t)| \le 1.$$

讨论将状态最快转移到 $(0, 0)$ 的时间最优控制问题.

第四章 非线性系统最优控制的存在性

§1. 函数的最小化

我们首先来看函数的最小化问题. 对这一问题的处理包含了一些重要的思想. 请看以下例题.

例 1.1. 设 $J : [0,1] \to \mathbb{R}$ 连续, 则众所周知存在 $\bar{u} \in [0,1]$ 使得

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in [0,1]} J(u). \tag{1.1}$$

对此，可以证明如下: 由下确界的定义，存在一列 $u_k \in [0,1]$, 称为**极小化序列**, 使得

$$\lim_{k \to \infty} J(u_k) = \inf_{u \in [0,1]} J(u).$$

由于 $[0,1]$ 是紧的, 因而存在 $\{u_k\}$ 的子列 $\{u_{k_i}\}$ 以及某个 $\bar{u} \in [0,1]$, 使得

$$\lim_{i \to \infty} u_{k_i} = \bar{u}.$$

进一步，由 $J(\cdot)$ 的连续性可得

$$J(\bar{u}) = \lim_{i \to \infty} J(u_{k_i}) = \lim_{k \to \infty} J(u_k) = \inf_{u \in [0,1]} J(u), \tag{1.2}$$

这就证明了 (1.1). □

仔细观察上述证明，我们可以发现，要使结论成立，在 (1.2) 中第一个等式只要是以下不等式成立即可:

$$J(\bar{u}) \leq \lim_{i \to \infty} J(u_{k_i}).$$

因此，我们可以将上述结果推广到更为一般的情形．为此，我们引入如下概念．

定义 1.1. 设 U 是度量空间[1].

(i) 称映射 $J: U \to \overline{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, +\infty]$ 是**下半连续的**(**简记为 l.s.c.**), 如果对任何 $r \in \mathbb{R}$, 集合 $\{u \in U \,\big|\, J(u) \le r\}$ 是闭的. 我们定义 J 的**定义域**如下:

$$\mathcal{D}(J) \triangleq \{u \in U \,\big|\, |J(u)| < +\infty\}. \tag{1.3}$$

当 $\mathcal{D}(J) \neq \phi$ 时, 我们称 $J(\cdot)$ 是**正常的**.

(ii) 称映射 $J: U \to \overline{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, +\infty]$ 是**上半连续的**(**简记为 u.s.c.**), 如果 $-J$ 是下半连续的, 或等价地, 对任何 $r \in \mathbb{R}$, 集合 $\{u \in U \,\big|\, J(u) \ge r\}$ 是闭的. 对于上半连续函数 J, 其定义域同样用 (1.3) 定义. 类似地, 当 $\mathcal{D}(J) \neq \phi$ 时, 称 $J(\cdot)$ 是**正常的**.

容易证明下面的简单事实．我们建议读者自行证明．

命题 1.2. 设 U 为度量空间, 则一个映射 $J: U \to \mathbb{R}$ 连续当且仅当它既是上半连续的又是下半连续的.

以上命题说明连续函数必定是上半连续和下半连续的．下例表明反之不然．该例中函数及其图象对于区分上半连续和下半连续的概念也是非常有帮助的．

例 1.2. 设 $U = [-1, 1]$. 定义

$$J(u) \triangleq \begin{cases} 0, & u \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ -1, & u = 0. \end{cases}$$

[1]事实上，在一般的拓扑空间中就可以定义函数的上半连续性或下半连续性．本书中，我们主要考虑的是度量空间，因而我们的定义只是涉及了度量空间的情形．如果读者对度量空间的知识不熟悉，可以把 U 看成 $\mathbf{R}^m$ 的一个子集．

$$\hat{J}(u) \triangleq \begin{cases} 0, & u \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 1, & u = 0. \end{cases}$$

容易验证 $J(\cdot)$ 是下半连续的，$\hat{J}(\cdot)$ 是上半连续的，但它们都不是连续的.

由于任何 Banach 空间, 包括 $\mathbb{R}^n$, 都是度量空间，因而定义 1.1 已涵盖了我们感兴趣的情形. 值得注意的是在定义 1.1 中，我们允许下半连续函数取值 $\pm\infty$ [2].

例 1.3. 设 U 是度量空间，$U_0 \subseteq U$ 是一个非空闭子集. 定义

$$I_{U_0}(u) = \begin{cases} 0, & u \in U_0, \\ +\infty, & u \in U \setminus U_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

则 $I_{U_0}(\cdot)$ 是下半连续的. 进一步，如果 U_0 是**正常的**，即 $U_0 \neq \phi, U$, , 则 $I_{U_0}(\cdot)$ 是正常的，且

$$\mathcal{D}(I_{U_0}) = U_0.$$

我们称 $I_{U_0}(\cdot)$ 为集合 U_0 的**示性函数**.

有时候，以下关于下半连续的等价定义更为方便.

命题 1.3. 设 U 是度量空间, 则 $J : U \to \overline{\mathbb{R}}$ 是下半连续的当且仅当对任何 $u_k \to \bar{u}$, 成立着

$$J(\bar{u}) \leq \varliminf_{k\to\infty} J(u_k). \tag{1.5}$$

[2]通常在应用中，我们只考虑不取 $-\infty$ 的下半连续函数 (和不取 $+\infty$ 的上半连续函数). 有时候，人们定义下半连续函数时就规定函数的取值范围为 $(-\infty, +\infty]$.

证明. 充分性. 任取 $r \in \mathbb{R}$，序列 $\{u_k\} \subseteq \{u \in U \big| J(u) \le r\}$，满足 $u_k \to \bar{u}$, 则由 (1.5), 我们有

$$J(\bar{u}) \le \varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \le r,$$

这就蕴涵了 $\bar{u} \in \{u \in U \big| J(u) \le r\}$. 从而 $\{u \in U \big| J(u) \le r\}$ 是闭的. 因此 $J(\cdot)$ 是下半连续的.

必要性. 反证法: 设 $J : U \to \overline{\mathbb{R}}$ 是下半连续的. 如果 (1.5) 不成立, 则存在 $u_k \to \bar{u}$ 使得

$$J(\bar{u}) > \varliminf_{k\to\infty} J(u_k).$$

在上式中左端可以是 $+\infty$, 右端可以是 $-\infty$, 但易见存在 $\ell \in \mathbb{R}$ 使得

$$J(\bar{u}) > \ell > \varliminf_{k\to\infty} J(u_k).$$

于是，存在 N 使得

$$J(\bar{u}) > \ell \ge J(u_k), \qquad \forall\, k \ge N.$$

因此 $\{u \in U \big| J(u) \le l\}$ 不是闭的. 这与 $J(\cdot)$ 的下半连续性矛盾. 从而 (1.5) 成立. □

下面的结果表明下半连续性在某些运算下仍然可以被保留.

命题 1.4. 设 U 为度量空间，$J_\alpha : U \to \overline{\mathbb{R}}$ 是一族下半连续函数，$\alpha \in A$. (i) 函数 $\sup\limits_{\alpha\in A} J_\alpha(\cdot)$ 是下半连续的.

(ii) 如果 A 是有限集，则 $\min\limits_{\alpha\in A} J_\alpha(\cdot)$ 是下半连续的.

(iii) 如果 A 是有限集，且 $\sum\limits_{\alpha\in A} J_\alpha(\cdot)$ 有意义，则 $\sum\limits_{\alpha\in A} J_\alpha(\cdot)$ 是下半连续的.

证明. (i) 对任何 $r \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\{u \in U \big| \sup_{\alpha \in A} J_\alpha(u) \le r\} = \bigcap_{\alpha \in A} \{u \in U \big| J_\alpha(u) \le r\}.$$

由下半连续性，右端每一个集合都是闭的，从而它们的交集也是闭集. 这样就得到了 $\sup_{\alpha \in A} J_\alpha(\cdot)$ 的下半连续性.

(ii) 对任何 $r \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\{u \in U \big| \min_{\alpha \in A} J_\alpha(u) \le r\} = \bigcup_{\alpha \in A} \{u \in U \big| J_\alpha(u) \le r\}. \tag{1.6}$$

由此易得结论.

(iii) 由命题 1.3, 对任何 $u_k \to \bar{u}$, 利用下极限的性质得

$$\sum_{\alpha \in A} J_\alpha(\bar{u}) \le \sum_{\alpha \in A} \varliminf_{k \to \infty} J_\alpha(u_k) \le \varliminf_{k \to \infty} \sum_{\alpha \in A} J_\alpha(u_k),$$

从而得到结论. □

一族连续函数的上确界未必是连续的，但上述命题告诉我们它一定是下半连续的.

我们指出一族下半连续函数的下确界未必是下半连续的.

例 1.4. 设

$$J_\alpha(u) = (1 - |u|)^\alpha, \qquad u \in [-1, 1], \alpha \in [0, +\infty),$$

则易见

$$\inf_{\alpha \in A} J_\alpha(u) = \begin{cases} 1, & u = 0, \\ 0, & u \ne 0, \end{cases}$$

不是下半连续的. 而 $J_\alpha(\cdot)$ 事实上还是连续的.

现在，我们来推广例 1.1 中的结果.

命题 1.5. 设 U 是紧度量空间，$J:U\to\overline{\mathbb{R}}$ 下半连续、正常且下方有界，则存在 $\bar u\in U$ 使得

$$J(\bar u)=\inf_{u\in U}J(u). \tag{1.7}$$

证明. 取极小化序列 $u_k\in U$，即

$$\lim_{k\to\infty}J(u_k)=\inf_{u\in U}J(u).$$

由于 U 是紧的，不妨假设 $u_k\to\bar u$. 于是，由 $J(\cdot)$ 的下半连续性，我们得到

$$J(\bar u)\le\varliminf_{k\to\infty}J(u_k)=\inf_{u\in U}J(u).$$

这样就得到 (1.7). □

上述证明包含了本章建立最优控制存在性理论的主要思想.

§2. 最优控制存在性 — 初步结果

本节中，我们对最优控制的存在性做一个初步的探讨. 考虑以下最优控制问题:

$$\dot y(t)=f(t,y(t),u(t)),\qquad t\in[0,T], \tag{2.1}$$

其中 $y(\cdot)\in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 为状态轨线, $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]\overset{\triangle}{=}\{u:[0,T]\to U \mid u(\cdot)\text{ 可测 }\}$ 为控制, U 为度量空间, $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$ 为给定的映射. 我们通常给出的条件将保证对任何 $(y_0,u(\cdot))\in\mathbb{R}^n\times$

$\mathscr{U}[0,T]$, 总有惟一的 $y(\cdot)\equiv y(\cdot\,;y_0,u(\cdot))$. 记

$$\begin{cases} \mathcal{Y}[0,T]\stackrel{\triangle}{=}\{y(\cdot\,;y_0,u(\cdot))\bigm| y_0\in\mathbb{R}^n,\ u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]\}, \\ \mathcal{P}[0,T]\stackrel{\triangle}{=}\{(y(\cdot\,;y_0,u(\cdot)),u(\cdot))\bigm| y_0\in\mathbb{R}^n,\ u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]\}. \end{cases}$$

任何 $(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}[0,T]$ 称为**状态 – 控制对**. 为简单起见，我们考虑的状态约束为如下形式：

$$(y(0),y(T))\in S\stackrel{\triangle}{=}\{y_0\}\times S_0, \tag{2.2}$$

其中 $y_0\in\mathbb{R}^n$ 固定而 $S_0\subseteq\mathbb{R}^n$ 为闭集. 考虑 Bolza 型的性能指标:

$$J(y(\cdot),u(\cdot))=h(y(T))+\int_0^T f^0(t,y(t),u(t))\mathrm{d}t,$$

其中 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$f^0:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$.

记 $\mathcal{P}_S[0,T]$, $\mathcal{Y}_S[0,T]$ 以及 $\mathscr{U}_S[0,T]$ 分别为可行对集，可行轨线集和可行控制集; 记 $\mathcal{P}_{ad}[0,T]$, $\mathcal{Y}_{ad}[0,T]$ 和 $\mathscr{U}_{ad}[0,T]$ 分别为允许对集，允许轨线集和允许控制集 (详见第一章, §2). 我们关心的最优控制问题为:

问题 (B). 求 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,T]$, 使得

$$J(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))=\inf_{(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,T]}J(y(\cdot),u(\cdot)). \tag{2.3}$$

满足 (2.3) 的 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 称为**最优对**; 相应的 $\bar{y}(\cdot)$ 和 $\bar{u}(\cdot)$ 分别称为**最优轨线**和**最优控制**.

首先，我们将会遇到以下问题:

(i) 允许对集 $\mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 是否非空?

(ii) 如果 $\mathcal{P}_{ad}[0,T]\neq\phi$, 最优对 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 是否存在?

前面我们已经指出，问题 (i) 与能控性问题密切相关. 下面是一个允许对集为空集的例子.

例 2.1. 考虑如下状态方程:

$$\dot{y}(t) = u(t), \qquad t \in [0,1], \tag{2.4}$$

和状态约束

$$(y(0), y(1)) \in S = \{(0,2)\}. \tag{2.5}$$

控制区域为 $U = [-1,1]$, 则对任何 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,1]$,

$$|y(T; 0, u(\cdot))| \le 1.$$

易见不存在满足 (2.5) 的 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,1]$, 从而 $\mathscr{U}_{ad}[0,1] = \phi$, $\mathcal{P}_{ad}[0,1] = \phi$.

下面的例子告诉我们即使 $\mathscr{U}_{ad}[0,T]$ 非空, 最优控制仍有可能不存在.

例 2.2. 设状态方程和状态约束仍是 (2.4) 和 (2.5). 令控制区域为 $U = \mathbb{R}$, 性能指标定义为

$$J(y(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^1 |y(t) - 2|^2 \mathrm{d}t.$$

对于这一问题, 易见 $\mathscr{U}_{ad}[0,1]$ 非空. 比如, 可以取

$$u_k(\cdot) = 2k\chi_{[0,\frac{1}{k}]}(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}[0,1], \ \forall\, k \ge 1.$$

相应于 $u_k(\cdot)$,

$$y_k(t) \equiv y(t; 0, u_k(\cdot)) = \begin{cases} 2kt\chi_{[0,\frac{1}{k}]}(t), & 0 \le t \le \frac{1}{k}, \\ 2, & \frac{1}{k} \le t \le 1. \end{cases}$$

从而 $u_k(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}$, 而且

$$J(y_k(\cdot), u_k(\cdot)) = \int_0^{\frac{1}{k}} |2kt - 2|^2 \ \mathrm{d}t = \frac{4}{3k} \to 0, \quad (k \to \infty).$$

因此,

$$\inf_{(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,1]} J(y(\cdot),u(\cdot))=0.$$

但是，易见下确界 0 是不能取到的. 这就是说这一控制问题的最优控制不存在.

上面的例子中，控制区域 U 是非紧的，因而不是一个非常令人信服的例子. 下面两个例子也许更为有趣.

例 2.3. 设状态方程为 (2.4)，控制区域为 $U=\{-1,1\}$, 状态约束为

$$y(0)=0, \tag{2.6}$$

性能指标定义为

$$J(y(\cdot),u(\cdot))=\int_0^1 y^2(t)\ \mathrm{d}t.$$

取

$$u_k(t)=\begin{cases} 1, & \text{如果 } t\in[\frac{\ell}{k},\frac{2\ell+1}{2k}),\ \ell=0,1,\cdots,k-1, \\ -1, & \text{其它}, \end{cases} \tag{2.7}$$

则 $u_k(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}[0,1]$，且易见

$$y_k(t)\overset{\triangle}{=}y(t;0,u_k(\cdot))\in[0,\frac{1}{2k}], \qquad \forall\ t\in[0,1].$$

从而

$$J(y_k(\cdot),u_k(\cdot))=\int_0^1 y_k^2(t)\ \mathrm{d}t\le\frac{1}{4k^2}\to0, \quad (k\to\infty).$$

因此,

$$\inf_{(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,1]} J(y(\cdot),u(\cdot))=0.$$

另一方面，对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,1]$, 总有 $y(\cdot;0,u(\cdot))\not\equiv0$. 从而这里下确界 0 也是不能取到的. 即本问题的最优控制不存在.

我们注意到在上一例中控制区域 U 是非凸的. 如果将上例中的控制区域 U 改成 $[-1,1]$，则相应的控制问题有最优控制. 下面的例子表明当控制区域是凸闭集时，如果性能指标没有相应的凸性，最优控制仍可能不存在.

例 2.4. 设状态方程和状态约束为 (2.4) 和 (2.6), 控制区域为 $U=[-1,1]$, 性能指标定义为

$$J(y(\cdot),u(\cdot))=\int_0^1\Big[y^2(t)-u^2(t)\Big]\mathrm{d}t.$$

取 $u_k(\cdot)$ 为 (2.7) 定义的函数, 则仿前例可以证明

$$\inf_{(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,1]}J(y(\cdot),u(\cdot))=-1.$$

现在, 我们来说明下确界 -1 是不能达到的. 反之, 设有 $\bar u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,1]$ 使得 $J(\bar y(\cdot),\bar u(\cdot))=-1$, 其中 $\bar y(\cdot)=y(\cdot;0,\bar u(\cdot))$, 则由 $J(\cdot)$ 和 U 的定义并注意到 $\bar y(\cdot)$ 连续, 可知

$$|\bar u(t)|=1,\qquad \text{a.e. } t\in[0,1],\tag{2.8}$$

以及

$$\bar y(t)=0,\qquad \forall\ t\in[0,1].\tag{2.9}$$

但是由 (2.9) 和 (2.4) 可得

$$\bar u(t)=0,\qquad \text{a.e. } t\in[0,1],$$

这与 (2.8) 矛盾. 因而本例控制问题不存在最优控制.

从命题 1.5 可见，如果我们有允许对集 $\mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 的“紧性”以及性能指标 $J(\cdot)$ 是“下半连续”的, 则我们可以得到最优控制的存在性. 但是这里马上涉及到两个问题: 首先, 让 $\mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 为紧的拓扑是什么？再者，在此拓扑下, $J(\cdot)$ 是否是下半连续的? 我们将在

第三第四节讨论这一问题. 下面先对一个特殊的问题建立最优控制的存在性.

考虑以下线性系统:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2.10}$$

以及性能指标

$$J(y(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^T f^0(y(t),u(t))\ \mathrm{d}t + h(y(T)).$$

我们假设

(L1) 函数 $A(\cdot)$ 和 $B(\cdot)$ 满足

$$\begin{aligned} A(\cdot) &\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times n}),\\ B(\cdot) &\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times m}). \end{aligned}$$

控制区域 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的凸紧集, 状态约束为

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n.$$

(L2) 函数 $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 以及 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为下半连续且有下界的凸函数[3].

定理 2.1. 对于系统 (2.10), 假设 (L1)—(L2) 成立, 则存在最优对 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot)) \in \mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 使得

$$J(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot)) = \inf_{(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,T]} J(y(\cdot),u(\cdot)).$$

证明. 由假设可见 $\mathscr{U}[0,T] = \mathscr{U}_{ad}[0,T]$, 且存在 $(y_k(\cdot),u_k(\cdot)) \in \mathcal{P}[0,T]$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} J(y_k(\cdot),u_k(\cdot)) = \overline{J} \equiv \inf_{(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,T]} J(y(\cdot),u(\cdot)) > -\infty.$$

[3] f^0 不依赖于 t 不是本质的假设.

由 (L1) 可知 U 是紧的，从而存在常数 $C>0$ 使得

$$\int_0^T |u_k(t)|^2 \, \mathrm{d}t \le C, \qquad \forall\ k \ge 1.$$

因此，由第二章定理 4.11, 不妨假设在 $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ 中,

$$u_k(\cdot) \xrightarrow{\mathrm{w}} \bar{u}(\cdot).$$

而由 Mazur 定理，我们有 $u_k(\cdot)$ 的一列凸组合, 使得在 $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$

$$\tilde{u}_k(\cdot) \triangleq \sum_{i\ge 1} \alpha_{ik} u_{i+k}(\cdot) \to \bar{u}(\cdot),$$

其中

$$\alpha_{ik} \ge 0, \quad \sum_{i\ge 1} \alpha_{ik} = 1.$$

由于 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 凸紧，因此 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}[0,T]$. 另一方面，由于 (2.10) 是线性的, 如果记

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k(\cdot) &= y(\cdot\,; y_0, \tilde{u}_k(\cdot)), \\ y_k(\cdot) &= y(\cdot\,; y_0, u_k(\cdot)), \end{aligned}$$

则

$$\tilde{y}_k(\cdot) = \sum_{i\ge 1} \alpha_{ik} y_{i+k}(\cdot),$$

且容易证明在 $C([0,T],\mathbb{R}^n)$,

$$\tilde{y}_k(\cdot) \to \bar{y}(\cdot) \equiv y(\cdot\,; y_0, \bar{u}(\cdot)).$$

于是利用 $f^0(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 的凸性、下半连续性以及 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned} & J(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \\ = \ & h(\bar{y}(T)) + \int_0^T f^0(\bar{y}(t), \bar{u}(t)) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \varliminf_{k\to\infty} \left\{h(\tilde{y}_k(T)) + \int_0^T f^0(\tilde{y}_k(t), \tilde{u}_k(t))\,\mathrm{d}t\right\} \\
&= \varliminf_{k\to\infty} J(\tilde{y}_k(\cdot), \tilde{u}_k(\cdot)) \\
&= \varliminf_{k\to\infty} J(\sum_{i\geq 1} \alpha_{ik} y_{i+k}(\cdot), \sum_{i\geq 1} \alpha_{ik} u_{i+k}(\cdot)) \\
&\leq \varliminf_{k\to\infty} \sum_{i\geq 1} \alpha_{ik} J(y_{i+k}(\cdot), u_{i+k}(\cdot)) \\
&= \overline{J}.
\end{aligned}
$$

因此 $\bar{u}(\cdot)$ 是最优的. □

上面的证明严重地依赖于状态方程的线性和控制区域的线性结构 (U 的凸性以及 $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ 的弱紧性等). 这些性质对于一般的情形并不成立, 因而为建立一般的存在性理论, 我们还需要做进一步的工作.

§3. 状态轨线集的紧性

仔细观察上一节定理 2.1 的证明，我们可以发现在通常意义下，允许对集 $\mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 并不是紧的. 进一步的观察可以发现，一般来说，对于一个最优控制问题，允许控制集 $\mathscr{U}_{ad}[0,T]$ 通常不是紧的. 但是相对地，可以看出在一定条件下，允许状态轨线集将会是紧的. 而最优控制的存在性似乎也较多地依赖于状态轨线集的紧性，对于允许控制集的紧性要求要弱一些. 特别，当性能指标中的积分函数 f^0 不依赖于 u 时，允许状态轨线集 $\mathcal{Y}_{ad}[0,T]$ 或可行轨线集 $\mathcal{Y}_S[0,T]$ 在 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 中的紧性将保证最优控制的存在性.

首先，我们来看可行轨线集 $\mathcal{Y}_S[0,T]$ 的致密性.

可行轨线集的致密性

我们假设

(B1) $T>0$, U 是紧度量空间，$S_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ 是闭集.

(B2) 函数 $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$ 关于 $t\in[0,T]$ 可测, 关于 $u\in U$ 连续，且存在常数 $L>0$ 以及 $\varphi(\cdot)\in L^p(0,T;\mathbb{R})$ $(p>1)$, 使得

$$\begin{cases} |f(t,x,u)-f(t,y,u)|\le L|x-y|, \\ \qquad\qquad \forall\ t\in[0,T],\ x,y,\in\mathbb{R}^n,\ u\in U, \\ |f(t,0,u)|\le\varphi(t), \qquad \forall\ t\in[0,T],\ u\in U. \end{cases}$$

我们有

定理 3.1. 固定 $y_0\in\mathbb{R}^n$, 并设 (B1)—(B2) 成立, 则对任何 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]$, 系统 (2.1) 存在惟一的满足初值条件 $y(0)=y_0$ 的解 $y(\cdot)\equiv y(\cdot\,;u(\cdot))$. 进一步, 考虑状态约束为 (2.2), 则可行轨线集 $\mathcal{Y}_S[0,T]$ 在 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 中致密[4].

证明. 在条件 (B1)—(B2) 下，方程 (2.1) 解的存在惟一性可由第二章定理 5.1 得到. 现在我们证明集 $\mathcal{Y}_S[0,T]$ 的致密性. 由 (B2),

$$\begin{aligned} & |y(t;u(\cdot))| \\ \le\ & |y_0|+\int_0^t |f(\tau,y(\tau),u(\tau))|\ d\tau \\ \le\ & |y_0|+\int_0^T \varphi(\tau)\ d\tau + L\int_0^t |y(\tau)|\ d\tau. \end{aligned}$$

于是由 Gronwall 不等式，可得与 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]$ 无关的常数 $C>0$ 使得

$$|y(t;u(\cdot))|\le C(1+|y_0|), \qquad \forall\ t\in[0,T],\ u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T].$$

[4]称集合 A 在距离空间 X 中致密, 如果它的闭包 $\overline{A}$ 是 X 中的紧集. 等价地, A 中的任何点列都有收敛子列 (收敛于 X 中但不一定是 A 中的点).

进一步，易见

$$
\begin{aligned}
&|y(t;u(\cdot)) - y(s;u(\cdot))| \\
\leq\ & \Big| \int_s^t |f(\tau, y(\tau), u(\tau))|\ d\tau \Big| \\
\leq\ & \Big| \int_s^t \varphi(\tau)\ d\tau \Big| + L \Big| \int_s^t |y(\tau)|\ d\tau \Big| \\
\leq\ & \Big| \int_s^t \varphi(\tau)\ d\tau \Big| + LC(1+|y_0|)|t-s|, \\
& \qquad\qquad\qquad \forall\ s,t \in [0,T],\ u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T].
\end{aligned}
$$

从而 $\mathcal{Y}_S[0,T]$ 一致有界且等度连续．由 Arzelà-Ascoli 定理，它在 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 中致密． □

可行轨线集的紧致性

为得到 $\mathcal{Y}_S[0,T]$ 在 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 中的紧性，我们引入如下条件

(B3) 映射 $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$ 满足如下的 **Filippov–Roxin 条件**: 对几乎所有的 $t\in[0,T]$, 以下集合对任何 $y\in\mathbb{R}^n$ 都是凸闭的:

$$
f(t,y,U) \triangleq \{f(t,y,u) \bigm| u \in U\}.
$$

进一步我们需要以下的 **Filippov 引理**, 这是第三章引理 2.5 的推广．

引理 3.2. 设 U 为紧度量空间. 而且 $g:[0,T]\times U\to\mathbb{R}^n$ 关于 $t\in[0,T]$ 可测, 关于 $u\in U$ 连续,

$$
0 \in g(t,U), \qquad \text{a.e. } t \in [0,T], \tag{3.1}
$$

则存在 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]$, 使得

$$
g(t,u(t)) = 0, \qquad \text{a.e. } t \in [0,T]. \tag{3.2}
$$

证明. 设 d 是 U 上的度量，定义

$$\bar{d}(u,v) \stackrel{\triangle}{=} \frac{d(u,v)}{1+d(u,v)}, \qquad \forall u,v \in U,$$

则 $\bar{d}$ 仍是 U 上的度量. 在此度量下，U 仍是紧的，g 关于 $u \in U$ 也仍是连续的. 接下来, 定义

$$\Gamma(t) \stackrel{\triangle}{=} \{u \in U \mid g(t,u) = 0\}, \qquad t \in [0,T].$$

不失一般性, 由 (3.1) 可设对任何 $t \in [0,T]$, $\Gamma(t) \neq \phi$. 令 $U_0 \stackrel{\triangle}{=} \{v_k \mid k \geq 1\}$ 是 U 的一个稠密子集. 我们先来证明函数 $\bar{d}(u,\Gamma(\cdot))$ 的可测性. 固定 $u \in U$, 我们断言对任何 $c \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}&\{t \in [0,T] \mid \bar{d}(u,\Gamma(t)) \leq c\}\\ =\ &\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty}\{t \in [0,T] \mid \bar{d}(u,v_j) \leq c + \frac{1}{i},\ |g(t,v_j)| \leq \frac{1}{i}\},\end{aligned} \tag{3.3}$$

这里

$$\bar{d}(u,\Gamma(t)) \stackrel{\triangle}{=} \inf_{v \in \Gamma(t)} \bar{d}(u,v).$$

事实上，$\bar{d}(u,\Gamma(t)) \leq c$ 当且仅当存在一个子列 $\{v_{j_k}\} \subseteq U_0$ 满足

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \bar{d}(u,v_{j_k}) \leq c, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \bar{d}(v_{j_k},\Gamma(t)) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

由于 U 是紧的，而 $g(t,\cdot)$ 连续，从而 (3.4) 中的第二个式子等价于

$$\lim_{k\to\infty} g(t,v_{j_k}) = 0.$$

于是 (3.4) 又等价于: 对任何 $i \geq 1$, 存在 $j \geq i$, 使得

$$\begin{cases} \bar{d}(u,v_j) \leq c + \frac{1}{i}, \\ |g(t,v_j)| \leq \frac{1}{i}. \end{cases}$$

这就证明了 (3.3). 由于 (3.3) 的右端是可测的，因而左端也是可测的. 这就是说，对任何 $u \in U$, $\bar{d}(u,\Gamma(\cdot))$ 定义了 $[0,T]$ 上的一个可测函数.

现在定义

$$u_0(t) \equiv u_1(t) \stackrel{\triangle}{=} v_1, \qquad \forall\ t \in [0,T].$$

易见 $u_0(\cdot), u_1(\cdot)$ 是可测的，而

$$\begin{cases} \bar{d}(u_1(t),\Gamma(t)) < 1, \\ \bar{d}(u_1(t),u_0(t)) < 2, \end{cases} \qquad \forall\ t \in [0,T].$$

假设我们已经定义了 $u_0(\cdot),u_1(\cdot),\cdots,u_k(\cdot)$ 满足

$$\begin{cases} \bar d(u_i(t),\Gamma(t))<2^{1-i}, \\ \bar d(u_i(t),u_{i-1}(t))<2^{2-i}, \end{cases} \qquad \forall\ t\in[0,T],\ i=1,2,\cdots,k, \tag{3.5}$$

则对任何 $t\in[0,T]$, 存在 $u\in\Gamma(t)$ 使得

$$\bar d(u_k(t),u)<2^{1-k}.$$

又由于 U_0 是 U 的稠密子集, 存在 $v\in U_0$ 使得

$$\bar d(v,u)<\min(2^{-k},2^{1-k}-\bar d(u_k(t),u)),$$

此时必有

$$\begin{cases} \bar d(v,\Gamma(t))\le \bar d(v,u)<2^{-k}, \\ \bar d(v,u_k(t))\le \bar d(v,u)+\bar d(u,u_k(t))<2^{1-k}. \end{cases} \tag{3.6}$$

现在定义

$$\begin{cases} E_i^k\stackrel{\triangle}{=}\{t\in[0,T]\ \big|\ \bar d(v_i,\Gamma(t))<2^{-k}\}, \\ F_i^k\stackrel{\triangle}{=}\{t\in[0,T]\ \big|\ \bar d(v_i,u_{k-1}(t))<2^{1-k}\}, \\ A_i^k=E_i^k\cap F_i^k,\ k,i\ge 1. \end{cases}$$

由 (3.6), 对于任何 $t\in[0,T]$, 存在 i 使得 $t\in A_i^k$. 这样就有

$$[0,T]=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^k.$$

另一方面, 由于 $t\mapsto d(v_i,\Gamma(t))$ 可测, 从而 E_i^k 可测. 又 F_i^k 是可测的，因而 A_i^k 是可测集.

现在定义 $u_{k+1}(\cdot):[0,T]\to U_0\subseteq U$ 如下:

$$u_{k+1}(t)=v_i,\qquad \forall\ t\in A_i^k\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j^k. \tag{3.7}$$

由 E_i^k 及 F_i^k 的定义以及 (3.7) 易得

$$\begin{cases} \bar d(u_{k+1}(t),\Gamma(t))<2^{-k}, \\ \bar d(u_{k+1}(t),u_k(t))<2^{1-k}. \end{cases} \tag{3.8}$$

这样，我们就归纳地定义了 $\{u_k(\cdot)\}$, $k=0,1,\cdots$ 且 (3.5) 对任何 $k\ge 1$ 成立. 由此可以得到对任何 $t\in[0,T]$, $\{u_k(t)\}$ 是 U 中的 Cauchy 列. 由 U 的完备性，我们得到

$$u(t)\stackrel{\triangle}{=}\lim_{k\to\infty}u_k(t)\in U,\qquad t\in[0,T].$$

由于 $u_k(\cdot)$ 是可测的，从而其极限 $u(\cdot)$ 也是可测的．即 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$．进一步，由 (3.8) 的第一式以及 $\Gamma(t)$ 的闭性, 可得

$$u(t) \in \Gamma(t), \qquad \forall\ t \in [0,T].$$

从而 (3.2) 成立. □

有了以上引理，我们可以建立以下结果.

定理 3.3. 设 (B1)—(B3) 成立，则 $\mathcal{Y}_S[0,T]$ 是 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 中的紧集.

证明. 任取序列 $\{y_k(\cdot)\}_{k\geq 0} \subseteq \mathcal{Y}_S[0,T]$．令 $u_k(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$ 为相应的控制: $y_k(\cdot) = y(\cdot\,; y_0, u_k(\cdot))$．不失一般性，我们可以假设在 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 中,

$$y_k(\cdot) \to \bar{y}(\cdot), \tag{3.9}$$

以及在 $L^p(0,T;\mathbb{R}^n)$ 中,

$$f_k(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} f(\cdot, y_k(\cdot), u_k(\cdot)) \stackrel{\mathrm{w}}{\longrightarrow} \bar{f}(\cdot). \tag{3.10}$$

这样，由 (3.10) 以及 Mazur 定理, 有 $f(\cdot\,, y_k(\cdot), u_k(\cdot))$ 的凸组合序列

$$\tilde{f}_k(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} \sum_{i\geq 1} \alpha_{ik} f(\cdot\,, y_{i+k}(\cdot), u_{i+k}(\cdot)),\ \alpha_{ik} \geq 0,\ \sum_{i\geq 1} \alpha_{ik} = 1, \tag{3.11}$$

使得在 $L^p(0,T;\mathbb{R}^m)$ 中,

$$\tilde{f}_k(\cdot) \to \bar{f}(\cdot). \tag{3.12}$$

另一方面，由 (B2) 及 (3.9) 可得当 $k \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned} & |\tilde{f}_k(t) - \sum_{i\geq 1} \alpha_{ik} f(t, \bar{y}(t), u_{i+k}(t))| \\ \leq\ & L \sum_{i\geq 1} \alpha_{ik} |y_{i+k}(t) - \bar{y}(t)| \to 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

关于 $t \in [0,T]$ 一致成立. 此时,

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \lim_{k\to\infty} y_k(t) \\ &= \lim_{k\to\infty} \Big(y_0 + \int_0^t f_k(s)\, \mathrm{d}s \Big) \\ &= y_0 + \int_0^t \bar{f}(s)\, \mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [0,T]. \end{aligned}$$

下面, 我们先证 $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{Y}[0,T]$. 为此，只要证明存在 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$, 使得

$$\bar{f}(t) = \bar{f}(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)), \qquad \text{a.e. } [0,T]. \tag{3.14}$$

结合 (3.12) 和 (3.13)，并利用 (B3), 我们得到

$$\begin{aligned} \bar{f}(t) &= \lim_{k\to\infty} \tilde{f}(t) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i\geq 1} \alpha_{ik} f(t, \bar{y}(t), u_{i+k}(t)) \\ &\in \overline{\mathrm{co}}\, f(t, \bar{y}(t), U) = f(t, \bar{y}(t), U). \end{aligned}$$

易见映射 $(t,u) \mapsto f(t,\bar{y}(t),u)$ 满足引理 3.2 的条件. 于是存在 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$, 使得 (3.14) 成立. 即 $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{Y}[0,T]$. 最后，由 $y_k(\cdot)$ 满足约束 (2.2) 以及 (3.9), 立即可得 $\bar{y}(\cdot)$ 也满足 (2.2). 因此 $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{Y}_S[0,T]$, 这就证明了 $\mathcal{Y}_S[0,T]$ 的紧致性. $\square$

需要指出, 尽管任何序列 $\{(y_k(\cdot), u_k(\cdot))\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{P}_S[0,T]$, 都有子列 $\{y_{k_i}(\cdot)\}_{i\geq 1}$ 收敛到某个 $\bar{y}(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} y(\cdot\,; y_0, \bar{u}(\cdot)) \in \mathcal{Y}_S[0,T]$, 但这并不表明 $\{u_k(\cdot)\}_{k\geq 1}$ 一定会有子列收敛到 $\bar{u}(\cdot)$. 我们甚至不能断言是否一定有 $\{u_k(\cdot)\}_{k\geq 1}$ 的子列收敛.

§4. 最优控制存在性

上面我们已经看到在条件 (B1)—(B3) 下, 可行轨线集 $\mathcal{Y}_S[0,T]$ 是 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 中的紧集. 按照 §1 中的思想, 我们还需要性能指标的下半连续性. 为此我们引入以下假设.

(B4) 设 $f^0:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是 Borel 可测函数，且关于 $y\in\mathbb{R}^n$ 下半连续; $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 下半连续. 进一步，存在常数 $L>0$, 使得

$$f^0(t,y)\geq -L,\quad h(y)\geq -L,\qquad \forall\,(t,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

上面考虑的 f^0 不依赖于 $u\in U$. 这使得我们可以基于状态轨线的紧致性得到关于最优控制存在的一个初步结果.

定理 4.1. 设 (B1)—(B4) 成立，$\mathcal{P}_{ad}[0,T]\neq\phi$, 则问题 (B) 至少有一个最优对.

证明. 任取极小化序列 $\{(y_k(\cdot),u_k(\cdot))\}_{k\geq1}\subseteq\mathcal{P}_{ad}[0,T]$. 按定理 3.3，可设存在 $\bar y(\cdot)\equiv y(\cdot\,;y_0,\bar u(\cdot))\in\mathcal{Y}_S[0,T]$, 使得 (3.9) 以及 (3.11)—(3.12) 成立. 由 (B4), 我们有

$$\begin{cases} f^0(t,\bar y(t))\leq \underline{\lim}_{k\to\infty} f^0(t,y_k(t)), & \text{a.e. } t\in[0,T],\\ h(\bar y(T))\leq \underline{\lim}_{k\to\infty} h(y_k(T)). \end{cases}$$

于是，由 Fatou 引理可得,

$$\begin{aligned} & J(\bar y(\cdot),\bar u(\cdot))\\ = \ & h(\bar y(T))+\int_0^T f^0(t,\bar y(t))\,\mathrm{d}t\\ \leq \ & \underline{\lim}_{k\to\infty} h(y_k(T))+\int_0^T \underline{\lim}_{k\to\infty} f^0(t,y_k(t))\,\mathrm{d}t\\ \leq \ & \underline{\lim}_{k\to\infty} h(y_k(T))+\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_0^T f^0(t,y_k(t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \varliminf_{k\to\infty} J(y_k(\cdot),u_k(\cdot))\\
&= \inf_{(y(\cdot),u(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,T]} J(y(\cdot),u(\cdot)).
\end{aligned}
$$

这样就证明了 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 是最优对. □

不难看到在条件 (B4) 下, 泛函 $J(y(\cdot),u(\cdot))$ 在以下意义下是下半连续的: 对任何 $(y_k(\cdot),u_k(\cdot))\in\mathcal{P}[0,T]$，若在 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 中 $y_k(\cdot)\to\bar{y}(\cdot)$, 则

$$
J(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))\le \varliminf_{k\to\infty} J(y_k(\cdot),u_k(\cdot)).
$$

这样, 集合 $\mathcal{P}_S[0,T]$ 的 "紧性" 加上 $J(y(\cdot),u(\cdot))$ 的 "下半连续性" 就导出了最优对的存在性.

当 $f^0(t,y)\equiv 0$, 我们可以看到问题 (B) 成为相应的 (M) 问题. 因此上述结果也告诉我们相应的 (M) 问题有最优对.

另一方面，f^0 与 u 无关这一假设是不能令人满意的. 利用第一章中将 (B) 问题转化为 (M) 问题的方法, 我们可以将 f^0 依赖于 u 的情形转化为可以利用定理 4.1 的情形. 例如考虑以下新的控制系统 (取 $\mathbf{y}=(y^0,y)$):

$$
\dot{\mathbf{y}}(t)=\begin{pmatrix} f^0(t,y(t),u(t))\\ f(t,y(t),u(t))\end{pmatrix}\triangleq \mathbf{f}(t,y(t),u(t)),\qquad t\in[0,T],
$$

状态约束化为

$$
\mathbf{y}(0)=\begin{pmatrix}0\\ y_0\end{pmatrix},\ \mathbf{y}(T)\in\mathbb{R}\times S_0.
$$

这时如果 $\mathbf{f}:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^{n+1}$ 满足 Filippov–Roxin 条件，即对几乎所有的 $t\in[0,T]$, 集合

$$
\left\{\begin{pmatrix} f^0(t,y,u)\\ f(t,y,u)\end{pmatrix}\ \middle|\ u\in U\right\}\quad 凸闭,\ \ \forall\, y\in\mathbb{R}^n,
$$

则我们可以利用定理 4.1 得到最优控制的存在性结果. 但可惜这样得到的结果作用是很有限的. 为说明这一点，我们举例如下:

例 4.1. 考虑控制系统

$$\dot{y}(t) = u(t), \qquad t \in [0, T],$$

控制区域为 $U = \mathbb{R}$, 而性能指标为

$$J(y(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T u(t)^2 \, \mathrm{d}t,$$

则

$$\mathbf{f}(t, y, U) = \{(u^2, u) \mid u \in \mathbb{R}\}, \qquad \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 中的抛物线，不是凸集! 因此尽管本例最优控制的存在性非常显然，但是我们不能由定理 4.1 得到最优控制的存在性.

上面的例子说明需要寻找一个更弱的条件来保证问题 (B) 具有最优对. 为此，对任何 $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, 我们引入以下集合

$$\mathcal{E}(t, y) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \big| z^0 \geq f^0(t, y, u), z = f(t, y, u), u \in U\}.$$

下面关于控制系统和性能指标之间的一个匹配条件，是保证最优对存在的一个关键条件.

(B5) 对几乎所有的 $t \in [0, T]$, 映射 $\mathcal{E}(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n}$ 在任何点 $y \in \mathbb{R}^n$ 具有 **Cesari 性质**:

$$\bigcap_{\delta > 0} \overline{\mathrm{co}}\, \mathcal{E}(t, \mathcal{O}_\delta(y)) = \mathcal{E}(t, y),$$

其中 $\mathcal{O}_\delta(y)$ 是以 y 为心半径为 $\delta > 0$ 的开球.

易见如果 $\mathcal{E}(t, y)$ 在 y 具有 Cesari 性质, 则 $\mathcal{E}(t, y)$ 是凸闭集. 下面关于 Cesari 条件成立的一个充分条件表明 Cesari 性质本质上是一个关于 $\mathcal{E}(t, y)$ 为凸闭集的条件.

命题 4.2. 设以下条件成立:

(B6) 对几乎所有的 $t\in[0,T]$, 映射 $f(t,\cdot,u)$ 关于 $u\in U$ 一致连续, $f^0(t,\cdot,u)$ 关于 $u\in U$ 一致下半连续, 即对任何给定的 $y\in\mathbb{R}^n$ 以及 $\varepsilon>0$, 存在 $\sigma=\sigma(t,y)>0$, 使得对任何 $y'\in\mathcal{O}_\sigma(y)$ 成立着

$$\begin{cases} |f(t,y',u)-f(t,y,u)|<\varepsilon, \\ f^0(t,y',u)>f^0(t,y,u)-\varepsilon, \end{cases} \qquad \forall\ u\in U, \tag{4.1}$$

则对于给定的 $t\in[0,T]$, $\mathcal{E}(t,\cdot)$ 在 y 点具有 Cesari 性质当且仅当 $\mathcal{E}(t,y)$ 为凸闭集.

证明. 我们只需要证明充分性. 设 (B6) 在点 $t\in[0,T]$ 成立，$y\in\mathbb{R}^n$ 使集合 $\mathcal{E}(t,y)$ 成为凸闭集, 则由 (B6), 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\sigma=\sigma(t,y)>0$, 使得当 $y'\in\mathcal{O}_\sigma(y)$ 时, (4.1) 成立. 这样, 对 $0<\delta<\sigma$ 以及任何 $(z_0^\delta,z^\delta)\in\mathcal{E}(t,\mathcal{O}_\delta(y))$, 存在 $y^\delta\in\mathcal{O}_\delta(y)$, $u^\delta\in U$, 使得

$$z_0^\delta\geq f^0(t,y^\delta,u^\delta), \quad z^\delta=f(t,y^\delta,u^\delta). \tag{4.2}$$

从而由 (4.1) 以及 (4.2)，我们有

$$\begin{cases} z_0^\delta\geq f^0(t,y^\delta,u^\delta)>f^0(t,y,u^\delta)-\varepsilon, \\ |z^\delta-f(t,y,u^\delta)|=|f(t,y^\delta,u^\delta)-f(t,y,u^\delta)|<\varepsilon. \end{cases}$$

这意味着 $(z_0^\delta,z^\delta)\in\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{E}(t,y))$. 于是

$$\mathcal{E}(t,\mathcal{O}_\delta(y))\subseteq\mathcal{O}_\varepsilon\Big(\mathcal{E}(t,y)\Big).$$

从而,

$$\bigcap_{\delta>0}\overline{\text{co}}\,\mathcal{E}(t,\mathcal{O}_\delta(y))\subseteq\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\mathcal{O}_\varepsilon\Big(\mathcal{E}(t,y)\Big)}=\overline{\mathcal{E}(t,y)}=\mathcal{E}(t,y).$$

由于

$$\mathcal{E}(t,y)\subseteq\bigcap_{\delta>0}\overline{\text{co}}\,\mathcal{E}(t,\mathcal{O}_\delta(y))$$

自然成立, 因此

$$\mathcal{E}(t,y)=\bigcap_{\delta>0}\overline{\text{co}}\,\mathcal{E}(t,\mathcal{O}_\delta(y)).$$

即 $\mathcal{E}(t,y)$ 在 y 点具有 Cesari 性质. □

对于例 4.1, 我们有

$$\mathcal{E}(t,y)=\{(z^0,u)\Big|z^0\geq u^2,\ u\in\mathbb{R}\},\qquad \forall\ (t,y)\in\mathbb{R}.$$

这样 $\mathcal{E}(t,y)$ 是凸闭集. 同样易见 (B6) 成立. 于是在例子 4.1 中，对于相应的问题 (B)，Cesari 条件满足.

在 (B6) 中对于连续性的假设是很弱的，这就是为什么我们说 Cesari 条件本质上是一个关于 $\mathcal{E}(t,y)$ 的凸闭性条件. 下面的结果则显示了 Cesari 条件要弱于 Filippov–Roxin 条件.

命题 4.3. 设(B6) 成立，$f^0(t,y,u)$ 下方有界. 如果 $\mathbf{f}(t,y,u)$ 满足 Filippov–Roxin 条件，则 $\mathcal{E}(t,y)$ 具有 Cesari 性质.

证明. 由命题 4.2，我们只需证明 $\mathcal{E}(t,y)$ 的凸闭性.

首先我们来看闭性. 对任何收敛序列 $(z_k^0,z_k)\in\mathcal{E}(t,y)$, 我们有 $u_k\in U$, 使得

$$\begin{cases} z_k^0\geq f^0(t,y,u_k)\triangleq\zeta_k^0, \\ z_k=f(t,y,u_k), \end{cases}\qquad \forall\ k\geq 0.$$

设 $(z_k^0,z_k)\to(\bar z^0,\bar z)$. 由于 $f^0(t,y,u_k)$ 下方有界，而其上方有一收敛列控制，因此它是有界的. 从而我们可以假设 (必要的话，选取子列)$\zeta_k^0\to\bar\zeta^0$. 由于 $(\zeta_k^0,z_k)\in\mathbf{f}(t,y,U)$, 而 $\mathbf{f}(t,y,U)$ 是闭集，从而必有 $(\bar\zeta^0,\bar z)\in\mathbf{f}(t,y,U)$. 这就是说存在 $\bar u\in U$, 使得

$$\begin{cases} f^0(t,y,\bar u)=\bar\zeta^0\leq\bar z^0, \\ f(t,y,\bar u)=\bar z. \end{cases}$$

因此, $(\bar{z}^0, \bar{z}) \in \mathcal{E}(t, y)$, 即 $\mathcal{E}(t, y)$ 是闭的.

现在来证明凸性. 设 $(z_i^0, z_i) \in \mathcal{E}(t, x)$ $(i = 1, 2)$, $\lambda \in (0, 1)$. 我们有 $u_1, u_2 \in U$ 使得

$$\begin{cases} z_i^0 \geq f^0(t, y, u_i) \triangleq \zeta_i^0, \\ z_i = f(t, y, u_i), \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

由 $\mathbf{f}(t, y, U)$ 的凸性可知存在 $\bar{u} \in U$ 使得

$$\begin{cases} \lambda z_1^0 + (1 - \lambda) z_2^0 \geq \lambda \zeta_1^0 + (1 - \lambda) \zeta_2^0 = f^0(t, y, \bar{u}), \\ \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2 = f(t, y, \bar{u}), \end{cases}$$

这就得到了 $\mathcal{E}(t, y)$ 的凸性. 从而由命题 4.2 得到 $\mathcal{E}(t, y)$ 具有 Cesari 性质. □

易见如果 $f(t, y, u)$ 关于 u 为线性, $f^0(t, y, u)$ 关于 u 为凸的, 而 U 为凸集, 则 $\mathcal{E}(t, y)$ 是凸的. 我们现在给出一个 $\mathcal{E}(t, y)$ 为凸集的充分条件.

命题 4.4. 令 $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. 设 $f(t, y, U)$ 为凸集, 且存在一个凸函数 $\varphi(\cdot\,; t, y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 使得

$$f^0(t, y, u) = \varphi(f(t, y, u); t, y), \qquad \forall\, u \in U, \tag{4.3}$$

则 $\mathcal{E}(t, y)$ 是凸集.

证明. 设 $(z_i^0, z_i) \in \mathcal{E}(t, y), i = 1, 2$, 则有 $u_1, u_2 \in U$ 使得

$$\begin{cases} z_i^0 \geq f^0(t, y, u_i), \\ z_i = f(t, y, u_i), \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

由 $f(t, y, U)$ 的凸性可得对任何 $\lambda \in (0, 1)$, 存在 $u_3 \in U$ 使得

$$\lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda f(t,y,u_1) + (1-\lambda) f(t,y,u_2) \\
&= f(t,y,u_3).
\end{aligned}
$$

由 (4.3) 可得

$$
\begin{aligned}
& \lambda z_1^0 + (1-\lambda) z_2^0 \\
\geq\ & \lambda f^0(t,y,u_1) + (1-\lambda) f^0(t,y,u_2) \\
=\ & \lambda \varphi(f(t,y,u_1);t,y) + (1-\lambda)\varphi(f(t,y,u_2);t,y) \\
\geq\ & \varphi\Big(\lambda f(t,y,u_1) + (1-\lambda) f(t,y,u_2);t,y\Big) \\
=\ & \varphi(f(t,y,u_3);t,y) = f^0(t,y,u_3).
\end{aligned}
$$

因此 $\mathcal{E}(t,y)$ 是凸的. □

为使集合 $\mathcal{E}(t,y)$ 是凸集，函数 $f(t,y,\cdot)$，$f^0(t,y,\cdot)$ 以及集合 U 应该满足某种匹配条件. 条件 (4.3) 就是这样一个匹配条件.

下面我们给出问题 (B) 最优对的存在性. 首先我们将条件 (B4) 改写为

(B4)$'$ 设 $f^0 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ 是 Borel 可测函数，且关于 $u \in U$ 连续; $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 下半连续. 进一步，存在常数 $L > 0$, 使得

$$
f^0(t,y,u), h(y) \geq -L, \qquad \forall\ (t,y,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U.
$$

定理 4.5. 设 (B1)—(B2), (B4)$'$ 以及(B5) 成立，$\mathcal{P}_{ad}[0,T] \neq \phi$, 则问题(B) 至少有一个最优对.

证明. 由定理的假设，可取极小化序列 $\{(y_k(\cdot),u_k(\cdot))\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{P}_{ad}[0,T]$ 使得

$$
J(y_k(\cdot),u_k(\cdot)) \to \overline{J} \triangleq \inf_{(y(\cdot),u(\cdot)) \in \mathcal{P}_{ad}[0,T]} J(y(\cdot),u(\cdot)).
$$

由定理 3.1, 可设在 $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 中,

$$y_k(\cdot) \to \bar{y}(\cdot). \tag{4.4}$$

进一步可设 (3.9) 和 (3.11)—(3.12) 成立. 令

$$f_j^0(\cdot) \equiv \sum_{i\geq 1} \alpha_{ij} f^0(\cdot\,, y_{i+j}(\cdot), u_{i+j}(\cdot)),$$

$$\bar{f}^0(t) = \varliminf_{j\to\infty} f_j^0(t) \geq -L, \qquad \text{a.e. } t\in[0,T],$$

则由 (4.4) 以及 (B5) 可得下式几乎处处成立:

$$(\bar{f}^0(t), \bar{f}(t)) \in \bigcap_{\delta>0} \overline{\mathrm{co}}\,\mathcal{E}(t, \mathcal{O}_\delta(\bar{y}(t))) = \mathcal{E}(t, \bar{y}(t)). \tag{4.5}$$

令

$$g(t,u) = |\bar{f}(t) - f(t,\bar{y}(t),u)| + \Big[f^0(t,\bar{y}(t),u) - \bar{f}^0(t)\Big]^+,$$

则 $g(\cdot,\cdot)$ 关于 $t\in[0,T]$ 可测, 关于 $u\in U$ 连续. 而由 (4.5), (3.1) 成立. 于是, 由 Filippov 引理 (引理 3.2) 即知存在可测的 $\bar{u}(\cdot)\in \mathscr{U}[0,T]$ 使得

$$\begin{cases} \bar{f}^0(t) \geq f^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)), \\ \bar{f}(t) = f(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)), \end{cases} \qquad \text{a.e. } t\in[0,T].$$

另一方面, 由 Fatou 引理

$$\begin{aligned} & J(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot)) \\ = \;& h(\bar{y}(T)) + \int_0^T f^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\,\mathrm{d}t \\ \leq \;& \varliminf_{k\to\infty} h(y_k(T)) + \int_0^T \bar{f}^0(t)\,\mathrm{d}t \\ = \;& \varliminf_{k\to\infty} h(y_k(T)) + \int_0^T \varliminf_{j\to\infty} f_j^0(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \varliminf_{k\to\infty} h(y_k(T)) + \varliminf_{j\to\infty}\int_0^T f_j^0(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \varliminf_{k\to\infty} h(y_k(T)) + \varlimsup_{k\to\infty}\int_0^T f^0(t,y_k(t),u_k(t))\,\mathrm{d}t \\
&\le \varlimsup_{k\to\infty}\Big(h(y_k(T)) + \int_0^T f^0(t,y_k(t),u_k(t))\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \lim_{k\to\infty} J(y_k(\cdot),u_k(\cdot)) \\
&= \overline{J}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

进一步, 容易由约束集 $S=\{x_0\}\times S_0$ 的闭性得到 $(\bar y(\cdot),\bar u(\cdot))\in\mathcal{P}_{ad}[0,T]$, 结合 (4.6) 即知 $(\bar y(\cdot),\bar u(\cdot))$ 是一最优对. □

注记

1. 在第二章，我们已经指出，变分问题存在性理论的出现是在 19 世纪末 Weierstrass 注意到下方有界的变分问题并不总是有解之后．进一步，关于存在性的故事可以追溯到一个古老的悖论：

   设 N 是最大的 (自然) 数，则 $N^2\ge N$, 从而由于 N 是最大的，又有 $N\ge N^2$. 这样 $N^2=N$, $N=1$.

   这一悖论告诉我们，如果我们错误地假设了最大的自然数的存在性，就会得到错误的结论．类似地，如果我们在例 2.4 中假设最优对 $(\bar y(\cdot),\bar u(\cdot))$ 存在，我们一定可以得到 $\bar y(\cdot)\equiv 0$, 进而 $\bar u(\cdot)=0$, a.e.．而事实上，与 $u(\cdot)\equiv 0$ 相对应的 $J(u(\cdot))=0$，与真正的下确界 -1 相差甚远．在许多实际问题的处理中，我们其实并不特别关心最优控制本身的计算．我们往往只需要求出一个近似的最优控制．但是求 (近似) 最优控制的过程经常是以最优控制所满足的必要条件为基础的．上面的例子表明如果没有存在性结果而直接利用必要条件，可能结果会与预期的大相径庭．这正是存在性理论在实际应用中的重要性．另一方面，存在性理论对于学科本身的发展所具有的理论意义自然也是无庸置疑的．

2. L. W. Neustadt 在其 1961 年的文章 [34] 中考虑了如下系统：

$$
\begin{cases}
\dot y(t)=A(t)y(t)+b(t,u(t)), & t\in[t_0,T],\\
y(t_0)=y_0,
\end{cases}
$$

和性能指标:

$$J(u(\cdot))=\int_{t_0}^{T}\{\langle a^0(t),y(t,u(t)\rangle+b^0(t,u(t))\}\mathrm{d}t.$$

其中, $A(\cdot):[t_0,T]\to\mathbf{R}^{n\times n}$ 以及 $a_0(\cdot):[t_0,T]\to\mathbf{R}^n$ 是可积的; U 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个有界闭集; 对于任何 $t\in[0,T]$, $b(t,\cdot):\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ 以及 $b^0(t,\cdot):\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ 连续; 对任何 $u\in U$, $b(\cdot,u):[t_0,T]\to\mathbf{R}^n$ 以及 $b^0(\cdot,u):[t_0,T]\to\mathbf{R}$ 可积; 而且对任何有界集 $K\subset\mathbf{R}^k$, 存在可积的 $\mu(\cdot):[t_0,T]\to\mathbf{R}$ 使得

$$|b(t,u)|+|b^0(t,u)|\le\mu(t);$$

y_0,y_1 为 $\mathbf{R}^n$ 中固定的两个点; 可行控制集为:

$$\mathscr{U}_{ad}=\{u(\cdot):[t_0,T]\to U\;\big|\;u(\cdot)\text{ 可测, }\}.$$

最优控制问题是寻找 $\hat{u}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$ 使得 $y(T;\hat{u}(\cdot))=y_1$,

$$J(\hat{u}(\cdot))=\inf_{\substack{u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}\\ y(T;u(\cdot))=y_1}}J(u(\cdot)).$$

记

$$y^0(t)=\int_{t_0}^{t}\{\langle a^0(s),y(s,u(s)\rangle+b^0(s,u(s))\}\mathrm{d}s,$$

$$\bar{y}=\begin{pmatrix}y^0\\ y\end{pmatrix},\quad \bar{b}(t,u)=\begin{pmatrix}b^0(t,u)\\ b(t,u)\end{pmatrix},\quad \bar{y}_0=\begin{pmatrix}0\\ y_0\end{pmatrix},$$

则

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\bar{y}}=\begin{pmatrix}0 & (a^0(t))^\top\\ 0 & A(t)\end{pmatrix}\bar{y}+\bar{b}(t,u(t)),\\ \bar{y}(t_0)=\bar{y}_0,\end{array}\right.\tag{1}$$

关于 $\bar{y}$ 是线性的. 最优控制问题就化为 (初值条件 $\bar{y}(t_0)=\bar{y}_0$) 寻找 $\hat{u}(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}$ 使得 $y(T;\hat{u}(\cdot))=y_1$,

$$y^0(T;\hat{u}(\cdot))=\inf_{\substack{u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}\\ y(T;u(\cdot))=y_1}}y^0(T;u(\cdot)).$$

记

$$\widehat{R}(t)=\{\bar{y}|\bar{y}=\bar{y}(t;u(\cdot),u(\cdot)\in\mathscr{U}_{ad}\},$$

则 $\widehat{R}(T)$ 是系统 (1) 的能达集. 它是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的有界凸闭集. 而前述最优控制问题等价于

$$\inf\{y^0|\bar{y}\in L\cap\widehat{R}(T)\},$$

其中 L 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的直线

$$y = y_1.$$

于是，如果有控制 $u(\cdot)$ 满足 $y(T;u(\cdot)) = y_1$, 最优控制问题有解．易见，在 Neustadt 讨论的情形中 Cesari 条件不必满足．事实上，这一结果是在没有凸性条件的情况下关于最优控制存在性最早的正面结果 (在时间上，它早于 Cesari 条件形成的时间)．

3. 尽管 Cesari 条件是一个凸性条件的自然推广．但是它还是漏掉一些最优控制显然存在的情形，比如当性能指标具有形式

$$\int_0^T f^0(t, u(t))\mathrm{d}t$$

此时，利用 Filippov 引理，相应的无约束最优控制问题的存在性便变成为一个函数的极值问题，只要 f^0 关于 u 有连续性，U 本身是有界闭集，且积分有下界，则最优控制总是存在．但此时 Cesari 条件未必成立．

4. 在形式上, 第三章引理 2.5 并不是引理 3.2 的特殊情形, 但是我们不难由引理 3.2 证明以下结论:

    设 U 为紧度量空间．$Q:[0,T] \to 2^U$ 是取值为紧集的上半连续的集值函数．$g:[0,T]\times U \to \mathbf{R}^n$ 关于 $t\in[0,T]$ 可测，关于 $u \in U$ 连续．

$$0 \in g(t, Q(t)), \qquad \text{a.e. } t \in [0,T],$$

则存在 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$, 使得

$$g(t, u(t)) = 0, \qquad \text{a.e. } t \in [0,T],$$
$$u(t) \in Q(t), \qquad \text{a.e. } t \in [0,T].$$

为此，我们只需将引理中的 g 用 $|g(t,u)| + |d(u, Q(t))|$ 代替．进一步，还可以利用引理 3.2 的证明将结果推广为 $Q(\cdot)$ 为可测、U 为可分完备度量空间的情形.

5. 在缺乏凸性条件时，讨论最优控制存在性的一个重要工具是松弛控制理论．松弛控制是以概率测度为值的函数类．较之于通常的控制犹如广义函数较之于通常的函数. 利用松弛控制证明最优控制的存在性的基本思路是先在松弛控制类中讨论最优松弛控制问题，得到最优松弛控制的存在性．然后通过说明所得的最优松弛控制为一个通常的控制，或可以改造为一个通常的控制来说明原问题最优控制的存在性. 松弛控制的前身是 Young 在二十世纪三十年代引入的广义曲线．Gamrelidze、McShane 和 Warga 对松弛控制理论的确立和发展起了重要的作用．对此有兴趣的读者可以参看 Gamrelidze [23, 24]、McShane [35~39]、Warga [45~50] 和 Young [53~56] ．为了处理控制区域非凸的情形，Fattorini 在 1991 年引进了由有限可加 (概率) 测度定义的松弛控制概念 (参见 [20, 21]).

习题

1. 证明命题 1.2.
2. 在命题 1.4(iii) 中，A 为可列集时结论如何？
3. 构造一个例子说明可列个下半连续函数的下确界未必是下半连续的.
4. 试构造一个最优控制问题的例子，使得 Cesari 条件不成立，但最优对存在.
5. 试对其它形式的最优控制问题讨论最优对的存在性定理. 例如，考察状态约束不同于 (2.2) 的情形或性能指标不是 Bolza 型的情形.

第五章 最大值原理

§1. 引言

本章的目的是建立刻画最优控制的 Pontryagin 最大值原理. 这是关于最优对的一个一阶必要条件. 首先我们给出问题的描述和一些常规的假设. 考虑如下控制系统:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), & \text{a.e. } t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

以及性能指标

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T f^0(t, y(t), u(t)) \mathrm{d}t,$$

其中控制 $u(\cdot)$ 取值于集合 U. 我们作如下假设:

(C1) $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $T > 0$.

(C2) 映射 $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ 和 $f^0 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ 是可测的, 且存在常数 $L > 0$ 和连续模[1] $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, 使得对 $\varphi(t, y, u) = f(t, y, u), f^0(t, y, u)$ 成立着

$$\begin{cases} |\varphi(t, y, u) - \varphi(t, \hat{y}, \hat{u})| \le L|y - \hat{y}| + \omega(|u - \hat{u}|), \\ \qquad\qquad \forall t \in [0, T], y, \hat{y} \in \mathbb{R}^n; u, \hat{u} \in U, \\ |\varphi(t, 0, u)| \le L, \qquad \forall\, (t, u) \in [0, T] \times U. \end{cases} \tag{1.2}$$

[1] 我们称 $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 为一个连续模，是指它在 $[0, +\infty)$ 上连续，严格单增，且在零点为零.

(C3) 映射 f, f^0 关于 y 是 C^1 的, 且存在连续模 $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, 使得对 $\varphi(t,y,u) = f(t,y,u), f^0(t,y,u)$ 成立着

$$|\varphi_y(t,y,u) - \varphi_y(t,\hat{y},\hat{u})| \le \omega(|y-\hat{y}| + |u-\hat{u}|),\\ \forall\ t \in [0,T], y, \hat{y} \in \mathbb{R}^n; u, \hat{u} \in U.$$

记 $\mathscr{U}[0,T] = \{u(\cdot) : [0,T] \to U \big| u(\cdot)\text{可测}\}$, 则对任何 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$, 由假设(C1)—(C2) 及第二章定理 5.1, 方程 (1.1) 有惟一解 $y(\cdot) \equiv y(\cdot\,; u(\cdot))$. 对于 f^0 以及 $f = (f^1, f^2, \cdots, f^n)$, 我们引入记号[2]:

$$f_y^0 \equiv \frac{\partial f^0}{\partial y} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial f^0}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f^0}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f^0}{\partial y_n} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

以及

$$f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y_1} & \frac{\partial f^2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f^1}{\partial y_2} & \frac{\partial f^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial y_n} & \frac{\partial f^2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y_n} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

本章，我们将建立控制问题最优对所满足的条件 — 最大值原理. 对最大值原理的研究是最优控制理论的一个重要内容. 在第二节中, 我们将讨论状态无约束 (但初始条件给定) 且 $U = \mathbb{R}^m$ 的情形. 这是最容易处理的情形. 对这一情形的讨论可以看成是经典变分思想的直接运用. 然后，我们将对控制区域更为一般的情形进行讨论，这时，我们将引入针状变分这一重要方法. 在本章的第三节我们还将考虑状态具有终端约束的情形. 该节的主要思想则是利用 Ekeland 变分原理将有约束问题化为无约束的近似问题.

[2](1.3) 可以看作是 (1.4) 一个特例.

§2. 终端无约束的控制问题

在这一节中，我们考虑以下问题：

问题 (C).寻找最优控制 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$ 使得 $\bar{u}(\cdot)$ 在 $\mathscr{U}[0,T]$ 上最小化性能指标 $J(\cdot)$, 即

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]} J(u(\cdot)).$$

在上面叙述的最优控制问题中, 初始状态是固定的, 状态在其他时刻没有约束, 这是比较容易处理的一类问题. 我们首先给出以下结果:

定理 2.1. 设 $U = \mathbb{R}^m$, f^0, f 关于 y 和 u 有连续的一阶偏导, f_y, f_u, f^0_y, f^0_u 一致有界. 若 $(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 是问题 (C) 的一个最优对, 则存在 $\bar{\psi}(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{\psi}}{\mathrm{d}t} = -f_y(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\bar{\psi}(t) + f^0_y(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)), \\ \bar{\psi}(T) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

使得

$$f_u(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\bar{\psi}(t) - f^0_u(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)) = 0 \tag{2.2}$$

在 $[0,T]$ 上几乎处处成立.

证明. 任取 $u(\cdot) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{U}[0,T]$, 则对任何 $\alpha \in \mathbb{R}$, $u^\alpha(\cdot) \triangleq \bar{u}(\cdot) + \alpha u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$. 从而 $J(u^\alpha(\cdot))$ 在 $\alpha = 0$ 取到最小值. 从而如果

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(u^\alpha(\cdot))|_{\alpha=0}$$

存在的话, 它就等于 0. 定理的证明过程就是于一个计算 $J(u^\alpha(\cdot))$ 在 $\alpha = 0$ 点的导数的过程. 考虑 $\alpha > 0$, 记 $y^\alpha(\cdot) \equiv y(\cdot; u^\alpha(\cdot))$, 我们

有

$$\begin{aligned}
& 0 \le \frac{1}{\alpha}\Big(J(u^\alpha(\cdot)) - J(\bar{u}(\cdot))\Big) \\
= & \int_0^T \frac{f^0(t,y^\alpha,u^\alpha) - f^0(t,\bar{y},\bar{u})}{\alpha}\ \mathrm{d}t \\
= & \int_0^T \Big\{ \int_0^1 \Big[\Big\langle f_y^0(t,\bar{y}+\theta(y^\alpha-\bar{y}),\bar{u}+\theta\alpha u), \frac{y^\alpha-\bar{y}}{\alpha} \Big\rangle \\
& + \Big\langle f_u^0(t,\bar{y}+\theta(y^\alpha-\bar{y}),\bar{u}+\theta\alpha u), u \Big\rangle \Big]\ d\theta \Big\}\ \mathrm{d}t. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

另一方面，若记

$$Y^\alpha(t) = \frac{y^\alpha(t) - \bar{y}(t)}{\alpha},$$

则

$$Y^\alpha(0) = 0,$$

且

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}Y^\alpha}{\mathrm{d}t} \\
= & \int_0^1 f_y(t,\bar{y}+\theta(y^\alpha-\bar{y}),\bar{u}+\theta\alpha u)^\top d\theta\ Y^\alpha \\
& + \int_0^1 f_u(t,\bar{y}+\theta(y^\alpha-\bar{y}),\bar{u}+\theta\alpha u)^\top u\ d\theta.
\end{aligned}$$

由于 f_y, f_u 一致有界, 因而有常数 $M > 0$, 使得

$$|Y^\alpha(t)| \le M \int_0^t |Y^\alpha(\tau)|\ d\tau + M \int_0^T |u(\tau)|\ d\tau.$$

所以由 Gronwall 不等式，$Y^\alpha(\cdot)$ 在 $[0,T]$ 上一致有界. 这样，$\forall\ t \in [0,T]$, 我们有

$$\lim_{\alpha\to 0} y^\alpha(t) = \lim_{\alpha\to 0}\Big(\bar{y}(t) + \alpha Y^\alpha(t)\Big) = \bar{y}(t).$$

于是，利用第二章定理 5.3 我们有

$$\|Y^\alpha(\cdot) - Y(\cdot)\|_{C[0,T]} \to 0,$$

其中

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = f_y(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))^\top Y(t) + f_u(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))^\top u(t), \\ Y(0) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

现在, 设 $\bar{\psi}(\cdot)$ 由 (2.1) 定义，利用 (2.4) 及 f_y^0, f_u^0 的连续性，在 (2.3) 中令 $\alpha \to 0+$ 可得

$$\begin{aligned} 0 \quad &\le \quad \int_0^T \Big[\langle f_y^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)), Y(t)\rangle + \langle f_u^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)), u(t)\rangle\Big] \,\mathrm{d}t \\ &= \quad \int_0^T \langle \frac{\mathrm{d}\bar{\psi}(t)}{\mathrm{d}t}, Y(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^T \langle f_y(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\bar{\psi}(t), Y(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_0^T \langle f_u^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)), u(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \quad -\int_0^T \langle \bar{\psi}(t), \frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}\rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^T \langle \bar{\psi}(t), f_y(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))^\top Y(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_0^T \langle f_u^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)), u(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \quad -\int_0^T \langle \bar{\psi}(t), f_u(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))^\top u(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_0^T \langle f_u^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)), u(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \quad \int_0^T \langle f_u^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)) - f_u(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\bar{\psi}(t), u(t)\rangle \,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.5}$$

上面第一个等式由 (2.4) 得到，第二个等式由 (2.1) 得到，在推导第三个等式的时候用了分部积分法，而第四个等式则利用了 $Y(\cdot)$ 所满足的方程 (2.4). 最后, 由 (2.5) 以及 $u(\cdot)$ 的任意性即得 (2.2). □

在控制问题中, 一般说来，U 表示的是控制能力的大小, 因而通常 U 不是全空间. 如果 U 是开集，则稍作技术处理，我们仍然

可以利用上面的方法来推导最优对所满足的必要条件. 进一步，如果 U 是凸集，则对于 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]$，$\alpha\in(0,1)$ 我们有

$$\bar{u}(\cdot)+\alpha(u(\cdot)-\bar{u}(\cdot))\in\mathscr{U}[0,T].$$

从而

$$0\le\frac{J\Big(\bar{u}(\cdot)+\alpha(u(\cdot)-\bar{u}(\cdot))\Big)-J(\bar{u}(\cdot))}{\alpha},\qquad\forall\,\alpha\in(0,1).$$

利用这一关系式同样可以用前面的方法得到类似的结果. 但是如果 U 仅仅是 $\mathbb{R}^m$ 中一个一般的集合，那么一般说来，$\bar{u}+\alpha u(\cdot)$ 或 $\bar{u}(\cdot)+\alpha(u(\cdot)-\bar{u}(\cdot))$ 就不一定仍然在 $\mathscr{U}[0,T]$ 中. 在这种情况下，我们就需要所谓的针状变分. 下面，我们将定理 2.1 的结果推广到控制区域更为一般的情形.

定理 2.2. 设 (C1)—(C3) 成立，$(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 是问题 (C)的一个最优对，则存在 $\bar{\psi}(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\bar{\psi}}{\mathrm{d}t}=-f_y(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\bar{\psi}(t)+f_y^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)),\\ \bar{\psi}(T)=0,\end{cases}\tag{2.6}$$

以及如下的最大值条件:

$$\begin{aligned}&\langle\bar{\psi}(t),f(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\rangle-f^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\\ =\;&\max_{u\in U}\{\langle\bar{\psi}(t),f(t,\bar{y}(t),u)\rangle-f^0(t,\bar{y}(t),u)\}\end{aligned}\tag{2.7}$$

在 $[0,T]$ 上几乎处处成立.

如果记

$$H(t,y,u,\psi)\overset{\triangle}{=}\langle\psi,f(t,y,u)\rangle-f^0(t,y,u),\tag{2.8}$$

则最优轨线满足的方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \psi}(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)), \tag{2.9}$$

此时, 方程 (2.6) 可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\psi}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial y}(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)), \tag{2.10}$$

而最大值条件 (2.7) 则成为

$$H(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)) = \max_{u\in U} H(t, \bar{y}(t), u, \bar{\psi}(t)). \tag{2.11}$$

通常, 将形为 (2.9)—(2.10) 的一组方程称为 **Hamilton 系统**, H 称为 **Hamilton 函数**, 方程 (2.6) 称为方程 (1.1) 的**伴随方程**.

定理 2.2 的证明. 任取 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$, 我们考虑

$$\begin{pmatrix} f^0(\cdot, \bar{y}(\cdot), u(\cdot)) - f^0(\cdot, \bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \\ f(\cdot, \bar{y}(\cdot), u(\cdot)) - f(\cdot, \bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \end{pmatrix}$$

由第二章定理 2.9，它是可测的，由第二章习题 18[3] ，对任何 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $E_\varepsilon \subset [0,T]$ 满足

$$|E_\varepsilon| = \varepsilon T,$$

以及

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \int_0^t \begin{pmatrix} f^0(\tau, \bar{y}(\tau), u(\tau)) - f^0(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{u}(\tau)) \\ f(\tau, \bar{y}(\tau), u(\tau)) - f(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{u}(\tau)) \end{pmatrix} d\tau \\
= \ & \int_{E_\varepsilon \bigcap [0,t]} \begin{pmatrix} f^0(\tau, \bar{y}(\tau), u(\tau)) - f^0(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{u}(\tau)) \\ f(\tau, \bar{y}(\tau), u(\tau)) - f(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{u}(\tau)) \end{pmatrix} d\tau \\
&+ \begin{pmatrix} r_\varepsilon^0(t) \\ r_\varepsilon(t) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

[3] 这里我们指出，证明最大值原理不需要用深刻的 Liapounoff 定理，而只需要用到 Liapounoff 定理的近似结果 (参见第二章习题 15).

其中 $|E|$ 表示集合 E 的 Lebesgue 测度，

$$|r_\varepsilon^0(t)| + |r_\varepsilon(t)| \le \varepsilon^2.$$

令

$$u^\varepsilon(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), & t \in [0,T] \setminus E_\varepsilon, \\ u(t), & t \in E_\varepsilon, \end{cases}$$

则 $u^\varepsilon(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$. 我们常称 $u^\varepsilon(\cdot)$ 是 $\bar{u}(\cdot)$ 的一个**针状变分**. 记 $y^\varepsilon(\cdot) = y(\cdot; u^\varepsilon(\cdot))$, 则

$$\begin{aligned} 0 \quad \le \quad & \frac{J(u^\varepsilon(\cdot)) - J(\bar{u}(\cdot))}{\varepsilon} \\ = \quad & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \Big[f^0(t, y^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) - f^0(t, \bar{y}(t), u^\varepsilon(t))\Big]\, \mathrm{d}t \\ & + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \Big[f^0(t, \bar{y}(t), u^\varepsilon(t)) - f^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))\Big]\, \mathrm{d}t \\ = \quad & \int_0^T \Big\langle \int_0^1 f_y^0(t, \bar{y} + \theta(y^\varepsilon - \bar{y}), u^\varepsilon)\ d\theta, \frac{y^\varepsilon - \bar{y}}{\varepsilon} \Big\rangle\, \mathrm{d}t \\ & + \frac{1}{\varepsilon}\int_{E_\varepsilon} \Big[f^0(t, \bar{y}, u) - f^0(t, \bar{y}, \bar{u})\Big]\, \mathrm{d}t \\ = \quad & \int_0^T \Big\langle \int_0^1 f_y^0(t, \bar{y} + \theta(y^\varepsilon - \bar{y}), u^\varepsilon)\ d\theta, \frac{y^\varepsilon - \bar{y}}{\varepsilon} \Big\rangle\, \mathrm{d}t \\ & + \int_0^T \Big[f^0(t, \bar{y}, u) - f^0(t, \bar{y}, \bar{u})\Big]\, \mathrm{d}t + \frac{r_\varepsilon^0(T)}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

另一方面，若记

$$Y^\varepsilon(\cdot) = \frac{y^\varepsilon(\cdot) - \bar{y}(\cdot)}{\varepsilon},$$

则类似于 (2.13), 我们有

$$\begin{aligned} Y^\varepsilon(s) \quad = \quad & \int_0^s \Big\{ \int_0^1 f_y(t, \bar{y} + \theta(y^\varepsilon - \bar{y}), u^\varepsilon)^\top\ d\theta\ Y^\varepsilon \Big\}\, \mathrm{d}t \\ & + \int_0^s \Big[f(t, \bar{y}, u) - f(t, \bar{y}, \bar{u})\Big]\, \mathrm{d}t + \int_0^s \frac{r_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\, \mathrm{d}t, \\ & \qquad \forall\ s \in [0,T]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

由上式及 (1.2), 可得

$$|Y^\varepsilon(t)| \quad \le \quad L\int_0^t |Y^\varepsilon(\tau)|\ d\tau + 2LT(\|\bar y(\cdot)\|_{C[0,t]}+1)+T\varepsilon.$$

于是由 Gronwall 不等式,

$$\|Y^\varepsilon(\cdot)\|_{C[0,T]} \le \Big[2LT(\|\bar y(\cdot)\|_{C[0,t]}+1)+T\Big]\mathrm{e}^{LT}.$$

即 $Y^\varepsilon(\cdot)$ 在 $C[0,T]$ 中一致有界. 特别，

$$y^\varepsilon(\cdot)\to\bar y(\cdot),\ \text{于}\ C[0,T].$$

于是，利用第二章定理 5.3 我们有

$$\|Y^\varepsilon(\cdot)-Y(\cdot)\|_{C[0,T]}\to 0,$$

其中

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = f_y(t,\bar y,\bar u)^\top Y + f(t,\bar y,u)-f(t,\bar y,\bar u),\\ Y(0)=0. \end{cases}$$

设 $\bar\psi(\cdot)$ 由 (2.6) 定义，则类似于 (2.5) 可得

$$\begin{aligned} 0 \quad \le \quad & \int_0^T \langle f(t,\bar y(t),\bar u(t)) - f(t,\bar y(t),u(t)),\bar\psi(t)\rangle\ \mathrm{d}t \\ & + \int_0^T \Big[f^0(t,\bar y(t),u(t)) - f^0(t,\bar y(t),\bar u(t))\Big]\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big[H(t,\bar y(t),\bar u(t),\bar\psi(t)) - H(t,\bar y(t),u(t),\bar\psi(t))\Big]\ \mathrm{d}t \ge 0,\\ &\qquad\qquad \forall\ u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

式 (2.15) 称为**积分型的最大值条件**, 下面我们要利用它来推导最大值条件 (2.7). 由于 U 是可分的, 我们可以取到 U 的一个可列的稠密子集 $\{v_j\}_{j=1}^\infty$. 记

$$Q_0 = \{s\in(0,T)\ \big|\ s\ \text{是}H(\cdot,\bar y(\cdot),\bar u(\cdot),\bar\psi(\cdot))\ \text{的 Lebesgue 点}\},$$

$$Q_j = \{s \in (0,T) \Big| s \text{ 是} H(\cdot, \bar{y}(\cdot), v_j, \bar{\psi}(\cdot)) \text{ 的 Lebesgue 点}\},\ j \geq 1,$$

则由 Lebesgue 可积函数的性质可知

$$|Q_j| = T, \qquad \forall\ j = 0, 1, 2, \cdots.$$

令 $Q = \bigcap_{j=0}^{\infty} Q_j$, 则仍然有

$$|Q| = T.$$

对任何 $t \in Q$, 任取 $h \in (0, \min(t, T-t))$, 并取

$$u(s) = \begin{cases} \bar{u}(s), & |s-t| \geq h, \\ v_j, & |s-t| < h, \end{cases}$$

则由 (2.15) 得

$$\int_{t-h}^{t+h} \Big[H(s, \bar{y}(s), \bar{u}(s), \bar{\psi}(s)) - H(s, \bar{y}(s), v_j, \bar{\psi}(s)) \Big]\, \mathrm{d}s \geq 0.$$

两边同除以 $2h$, 并令 $h \to 0+$, 由 Lebesgue 点的定义可得

$$H(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)) - H(t, \bar{y}(t), v_j, \bar{\psi}(t)) \geq 0.$$

由 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的稠密性以及 $H(t, y, \cdot, \psi)$ 的连续性知上式对任何 $v \in U$ 成立，即

$$H(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)) \geq H(t, \bar{y}(t), v, \bar{\psi}(t)), \qquad \forall\ v \in U, t \in Q.$$

这就证明了 (2.7). □

我们看到，定理 2.1 是定理 2.2 的一个特例，利用最大值条件 (2.7)，当 f^0 关于 u 可导时，立即可得 (2.2). 因而针状变分不仅使我们回避了控制区域没有线性结构的困难，也让我们放松了对函

数 f, f^0 光滑性的要求. 我们注意到, 上面讨论的是 Lagrange 问题, 而第一章 §2 的结果告诉我们, 在一定条件下, Bolza 问题、Lagrange 问题和 Mayer 问题是等价的. 因此，对于 Bolza 问题和 Mayer 问题应该有相应的最大值原理. 我们将它们的严格叙述和证明留给读者作为练习.

§3. 具有终端约束的控制问题

本节中，我们将考虑终端有约束的最优控制问题. 回顾第三章所考虑的时间最优控制问题中，我们要求在终止时刻 T，状态 $y(T)$ 落在某一个给定的目标集合中. 更一般地，我们还考虑了初始状态可以在一个集合中变化的情形. 本节中，为简明起见，我们仅仅考虑初始状态和终端状态均为固定的情形. 我们假设所考虑的控制问题具有如下约束条件：

$$y(T) = y_1.$$

记

$$\mathscr{U}_{ad}[0,T] \equiv \{u(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T] \Big| y(T; u(\cdot)) = y_1\}.$$

为允许控制集. 设状态方程、性能指标仍由第一节给出，本节考虑的最优控制问题为

问题 $(\widetilde{\mathrm{C}})$. 寻找最优控制 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}[0,T]$ 使得 $\bar{u}(\cdot)$ 在 $\mathscr{U}_{ad}[0,T]$ 上最小化性能指标 $J(\cdot)$, 即

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathscr{U}_{ad}[0,T]} J(u(\cdot)).$$

我们有如下的最大值原理

定理 3.1. 设 (C1)—(C3) 成立，$(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 是问题 $(\widetilde{\mathrm{C}})$ 的一个最优对，则存在 $\bar{\psi}_0\le 0$ 和 $\bar{\psi}(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$\bar{\psi}_0^2+|\bar{\psi}(t)|^2>0,\qquad \forall\, t\in[0,T], \tag{3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\psi}}{\mathrm{d}t}=-\bar{\psi}_0 f_y^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))-f_y(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\bar{\psi}(t),$$

以及如下的最大值条件:

$$\begin{aligned}&\bar{\psi}_0 f^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))+\langle\bar{\psi}(t),f(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\rangle\\ =\ &\max_{u\in U}\{\bar{\psi}_0 f^0(t,\bar{y}(t),u)+\langle\bar{\psi}(t),f(t,\bar{y}(t),u)\rangle\}\end{aligned} \tag{3.2}$$

在 $[0,T]$ 上几乎处处成立.

回顾处理多元函数的条件极值问题时, 推导极值点的必要条件的一个方法是利用隐函数将问题化为无条件极值问题. 对于控制问题，这一方法是困难的. 我们也可以在性能指标中加一项指标函数 (见 1.4) 将有约束问题化为无约束问题. 然而，由于新的性能指标缺乏一定的连续性，这使问题同样地难以处理[4]. 条件极值的另一种处理方法是利用罚函数法将条件极值问题化为近似的无条件极值问题. 处理状态有约束的最优控制问题的一个方法与此类似. 其主要思想是利用变分原理将有约束问题化为一系列近似的无约束最优控制问题.

首先，我们介绍以下的**艾克兰 (Ekeland) 变分原理**[5]，有关度量 (距离) 空间的知识，可以参看泛函分析的有关教材.

[4]现在，利用非光滑分析使得人们有可能利用改变指标函数来处理有约束问题.

[5]在欧氏空间中，大体上，Ekeland 变分原理可以有这样的几何意义：一个下方有界的函数，如果最小值点存在，则过最小值点的一个水平的超平面支撑函数的图象；但是，对于一般的情形，最小值点不一定存在，此时由 Ekeland 变分原理，我们可以找到一个近似的最小值点，与给定的某个近似最小值点的距离不太远，且过这一点有一个以该点为顶点的相当平坦的锥面支撑函数的图象.

引理 3.2. 设 (V,d) 是完备度量空间，$F: V \to (-\infty,+\infty]$ 是下方有界下半连续函数,$F \not\equiv +\infty$. 设有 $\varepsilon > 0$ 及 $v_0 \in V$ 满足

$$F(v_0) \le \inf_{v\in V} F(v) + \varepsilon,$$

则对任何 $\lambda > 0$, 存在 $v_\lambda \in V$ 使得

(i) $F(v_\lambda) \le F(v_0)$;

(ii) $d(v_\lambda, v_0) \le \lambda$;

(iii) 对任何 $w \in V$,

$$F(v_\lambda) \le F(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w, v_\lambda),$$

即函数 $F(\cdot) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\cdot, v_\lambda)$ 在 v_λ 点取到最小值.

证明. 记

$$S_0 \equiv \left\{ w \in V | F(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w, v_0) < F(v_0) \right\}.$$

如果 $S_0 = \phi$, 则取 $v_\lambda = v_0$ 即得引理. 否则,

$$0 \le \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w, v_0) < F(v_0) - F(w), \qquad \forall\ w \in S_0.$$

从而

$$0 < F(v_0) - \inf_{w\in S_0} F(w).$$

于是由下确界的定义知存在 $v_1 \in S_0$ 满足

$$0 \le F(v_1) - \inf_{w\in S_0} F(w) \le \frac{1}{2}\Big(F(v_0) - \inf_{w\in S_0} F(w) \Big).$$

而由 $v_1 \in S_0$，我们有

$$F(v_1) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(v_1, v_0) < F(v_0).$$

于是对于任何 $w \notin S_0$, 总有

$$\begin{aligned} & F(w)+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(w,v_1) \\ \geq\ & F(v_0)-\frac{\varepsilon}{\lambda}d(w,v_0)+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(w,v_1) \\ \geq\ & F(v_0)-\frac{\varepsilon}{\lambda}d(v_1,v_0) \\ >\ & F(v_1). \end{aligned}$$

这样，

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv \Big\{w\in V|F(w)+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(w,v_1)<F(v_1)\Big\} \\ &= \Big\{w\in S_0|F(w)+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(w,v_1)<F(v_1)\Big\}\subseteq S_0. \end{aligned}$$

如果 S_1 为空集，则取 $v_\lambda = v_1$ 即得引理. 否则，类似地可以取到 $v_2 \in S_1$ 满足

$$0\leq F(v_2)-\inf_{w\in S_1}F(w)\leq\frac{1}{2}\Big(F(v_1)-\inf_{w\in S_1}F(w)\Big),$$

以及

$$F(v_2)+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(v_2,v_1)<F(v_1).$$

一般地，或者我们经过有限步找到了使引理成立的 v_λ，或者可以定义一列非空集 S_n 和 $v_n \in S_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 满足

$$S_n=\Big\{w\in V|F(w)+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(w,v_n)<F(v_n)\Big\}\subseteq S_{n-1},$$

$$0\leq F(v_{n+1})-\inf_{w\in S_n}F(w)\leq\frac{1}{2}\Big(F(v_n)-\inf_{w\in S_n}F(w)\Big), \tag{3.3}$$

以及

$$F(v_{n+1})+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(v_{n+1},v_n)<F(v_n). \tag{3.4}$$

由 (3.3),

$$F(v_{n+1})-\inf_{w\in S_n}F(w)\leq F(v_n)-\inf_{w\in S_n}F(w).$$

从而

$$F(v_{n+1}) \le F(v_n).$$

即 $F(v_n)$ 单调下降. 由于 F 在 V 上下方有界，因而 $F(v_n)$ 收敛. 另一方面，由 (3.4), 对任何 $m > n$,

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{\lambda} d(v_m, v_n) \\ \le\ & \frac{\varepsilon}{\lambda}[d(v_m, v_{m-1}) + \cdots + d(v_{n+1}, v_n)] \\ <\ & F(v_n) - F(v_m). \end{aligned} \tag{3.5}$$

从而 $\{v_n\}$ 是 V 中的一个 Cauchy 序列. 由 V 的完备性,

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v_\lambda$$

存在. 下面我们证明这个 v_λ 满足 (i)—(iii).

首先，在 (3.5) 中取 $n = 0$ 得

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} d(v_m, v_0) \le F(v_0) - F(v_m).$$

令 $m \to \infty$ 得

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} d(v_\lambda, v_0) \le F(v_0) - F(v_\lambda) \le F(v_0) - \inf_{v\in V} F(v) \le \varepsilon.$$

由此即得 (i)—(ii). 下面我们来证明 (iii). 若

$$w \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n,$$

则由 S_n 的单调性知存在 $m > 1$ 使得

$$w \notin S_n, \qquad \forall\, n \ge m,$$

于是由 S_n 的定义得

$$F(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w, v_n) \ge F(v_n), \qquad \forall\, n \ge m.$$

在上式中令 $n\to\infty$, 并利用 F 的下半连续性，我们有

$$F(w)+\frac{\varepsilon}{\lambda}d(w,v_\lambda)\geq F(v_\lambda),$$

即对于 $w\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$，(iii) 成立.

若 $w\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$，由 (3.3)，

$$2F(v_{n+1})\leq F(v_n)+\inf_{v\in S_n}F(v)\leq F(v_n)+F(w).$$

令 $n\to\infty$，并注意到 $F(v_n)$ 收敛以及 F 的下半连续性得

$$F(v_\lambda)\leq\lim_{n\to\infty}F(v_n)\leq F(w),$$

从而对于 $w\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$，(iii) 也成立. 事实上我们还可以进一步证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n=\{v_\lambda\}$. 这样，我们就证明了引理. □

现在，我们利用艾克兰变分原理来推导最大值原理.

定理 3.1 的证明. 不失一般性，设 $J(\bar u(\cdot))=0$. 对于任何 $\varepsilon>0$, 令

$$J_\varepsilon(u(\cdot))\equiv\left\{[(J(u(\cdot))+\varepsilon)^+]^2+|y(T;u(\cdot))-y_1|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

则

$$J_\varepsilon(\bar u(\cdot))=\varepsilon\leq\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]}J_\varepsilon(u(\cdot))+\varepsilon. \tag{3.6}$$

进一步，由 $\bar u(\cdot)$ 的最优性，易见

$$J_\varepsilon(u(\cdot))>0,\qquad\forall\ u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T],\quad\varepsilon>0.$$

在 $\mathscr{U}[0,T]$ 上定义

$$d(u(\cdot),v(\cdot)) \equiv \Big|\{t\in[0,T] | u(t)\neq v(t)\}\Big|, \tag{3.7}$$

则容易证明 $(\mathscr{U}[0,T],d)$ 构成一个完备的度量空间, 该度量称为**艾克兰度量**. 取 $\lambda=\sqrt{\varepsilon}$, 由 (3.6) 及艾克兰变分原理，存在 $u^\varepsilon(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]$ 满足

$$d(u^\varepsilon(\cdot),\bar{u}(\cdot))\leq\sqrt{\varepsilon}, \tag{3.8}$$

以及

$$J_\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))\leq J_\varepsilon(u(\cdot))+\sqrt{\varepsilon}d(u(\cdot),u^\varepsilon(\cdot)), \qquad \forall\, u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]. \tag{3.9}$$

这样,$u^\varepsilon(\cdot)$ 成为 $J_\varepsilon(\cdot)+\sqrt{\varepsilon}d(\cdot,u^\varepsilon)$ 在 $\mathscr{U}[0,T]$ 上的最小值点, 我们的思路是采用类似于定理 2.2 证明中的方法来推导 $u^\varepsilon(\cdot)$ 所满足的必要条件, 然后通过取极限得到 $\bar{u}(\cdot)$ 所满足的必要条件. 记 $y^\varepsilon(\cdot)\triangleq y(\cdot;u^\varepsilon(\cdot))$, 并任取 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]$. 对于任意的 $\rho\in(0,1)$, 由第二章习题 18, 我们有 $E^\varepsilon_\rho\subseteq[0,T]$ 使得

$$|E^\varepsilon_\rho|=\rho T,$$

$$\begin{aligned}&\rho\int_0^t\begin{pmatrix}f^0(\tau,y^\varepsilon(\tau),u(\tau))-f^0(\tau,y^\varepsilon(\tau),u^\varepsilon(\tau))\\ f(\tau,y^\varepsilon(\tau),u(\tau))-f(\tau,y^\varepsilon(\tau),u^\varepsilon(\tau))\end{pmatrix}d\tau\\ =&\int_{E^\varepsilon_\rho\bigcap[0,t]}\begin{pmatrix}f^0(\tau,y^\varepsilon(\tau),u(\tau))-f^0(\tau,y^\varepsilon(\tau),u^\varepsilon(\tau))\\ f(\tau,y^\varepsilon(\tau),u(\tau))-f(\tau,y^\varepsilon(\tau),u^\varepsilon(\tau))\end{pmatrix}d\tau\\ &+\begin{pmatrix}r^{0,\varepsilon}_\rho(t)\\ r^\varepsilon_\rho(t)\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.10}$$

以及

$$|r^{0,\varepsilon}_\rho(t)|+|r^\varepsilon_\rho(t)|\leq\rho^2.$$

令

$$u^\varepsilon_\rho(t)=\begin{cases}u^\varepsilon(t), & t\in[0,T]\setminus E^\varepsilon_\rho,\\ u(t), & t\in E^\varepsilon_\rho,\end{cases}$$

并记 $y_\rho^\varepsilon(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} y(\cdot; u_\rho^\varepsilon(\cdot))$, 则类似于 (2.12)—(2.14) 可得 (对于固定的 $\varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned} y_\rho^\varepsilon(\cdot) &= y^\varepsilon(\cdot) + \rho Y^\varepsilon(\cdot) + o(\rho), \qquad \text{于 } C[0,T], & (3.11)\\ J(u_\rho^\varepsilon(\cdot)) &= J(u^\varepsilon(\cdot)) + \rho Y^{0,\varepsilon} + o(\rho), & (3.12)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y^\varepsilon}{\mathrm{d}t} = f_y(t, y^\varepsilon, u^\varepsilon)^\top Y^\varepsilon + f(t, y^\varepsilon, u) - f(t, y^\varepsilon, u^\varepsilon), \\ Y^\varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y^{0,\varepsilon} &= \int_0^T \langle f_y^0(t, y^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)), Y^\varepsilon(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^T \Big[f^0(t, y^\varepsilon(t), u(t)) - f^0(t, y^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \Big] \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

而由 (3.9),

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\varepsilon}T \le -\frac{\sqrt{\varepsilon}d(u_\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)}{\rho} \le \frac{J_\varepsilon(u_\rho^\varepsilon) - J_\varepsilon(u^\varepsilon)}{\rho} \\ = & \frac{1}{J_\varepsilon(u_\rho^\varepsilon) + J_\varepsilon(u^\varepsilon)} \Bigg\{ \frac{[(J(u_\rho^\varepsilon) + \varepsilon)^+]^2 - [(J(u^\varepsilon) + \varepsilon)^+]^2}{\rho} \\ & \quad + \frac{|y_\rho^\varepsilon(T) - y_1|^2 - |y^\varepsilon(T) - y_1|^2}{\rho} \Bigg\} \qquad (3.13) \end{aligned}$$

利用微分中值定理，存在 $\theta_\rho^\varepsilon \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} & \frac{[(J(u_\rho^\varepsilon) + \varepsilon)^+]^2 - [(J(u^\varepsilon) + \varepsilon)^+]^2}{\rho} \\ = & 2\Big(J(u^\varepsilon) + \varepsilon + \theta_\rho^\varepsilon (J(u_\rho^\varepsilon) - J(u^\varepsilon)) \Big)^+ \frac{J(u_\rho^\varepsilon) - J(u^\varepsilon)}{\rho}. \end{aligned}$$

又

$$\frac{|y_\rho^\varepsilon(T) - y_1|^2 - |y^\varepsilon(T) - y_1|^2}{\rho}$$

$$= \quad \langle y_\rho^\varepsilon(T) + y^\varepsilon(T) - 2y_1, \frac{y_\rho^\varepsilon(T) - y^\varepsilon(T)}{\rho} \rangle.$$

于是利用 (3.10)—(3.12), 并在 (3.13) 中令 $\rho \to 0^+$ 得

$$-\sqrt{\varepsilon}T \quad \leq \quad \frac{[J(u^\varepsilon(\cdot)) + \varepsilon]^+}{J_\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))}\ Y^{0,\varepsilon} + \Big\langle \frac{y^\varepsilon(T) - y_1}{J_\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))}, Y^\varepsilon(T) \Big\rangle \tag{3.14}$$

记

$$\begin{cases} \varphi_0^\varepsilon = \dfrac{(J(u^\varepsilon(\cdot)) + \varepsilon)^+}{J_\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))}, \\ \varphi^\varepsilon = \dfrac{y^\varepsilon(T) - y_1}{J_\varepsilon(u^\varepsilon(\cdot))}, \end{cases}$$

则

$$\varphi_0^\varepsilon \geq 0, \qquad |\varphi_0^\varepsilon|^2 + |\varphi^\varepsilon|^2 = 1.$$

于是 $(\varphi_0^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ 有收敛子列. 不妨设 $(\varphi_0^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ 本身收敛,

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varphi_0^\varepsilon = \bar{\varphi}_0, \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \varphi^\varepsilon = \bar{\varphi}, \end{cases}$$

则

$$\bar{\varphi}_0 \geq 0, \qquad |\bar{\varphi}_0|^2 + |\bar{\varphi}|^2 = 1.$$

另一方面, 容易证明, 当 $\varepsilon \to 0+$ 时

$$\begin{aligned} & Y^{0,\varepsilon} \to Y^0, \\ & y^\varepsilon(\cdot)\ \text{在}C[0,T]\text{中一致收敛于}\ \bar{y}(\cdot), \\ & Y^\varepsilon(\cdot)\ \text{在}C[0,T]\text{中一致收敛于}\ Y(\cdot), \end{aligned}$$

这里

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = f_y(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))^\top Y(t) + f(t, \bar{y}(t), u(t)) - f(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)), \\ Y(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y^0 &= \int_0^T \langle f_y^0(t,\bar y(t),\bar u(t)), Y(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^T \Big[f^0(t,\bar y(t),u(t)) - f^0(t,\bar y(t),\bar u(t))\Big]\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

记 $\bar\psi_0 = -\bar\varphi_0$, 则

$$\bar\psi_0 \le 0.$$

再令 $\bar\psi(\cdot)$ 满足如下方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar\psi}{\mathrm{d}t} = -\bar\psi_0 f_y^0(t,\bar y(t),\bar u(t)) - f_y(t,\bar y(t),\bar u(t))\bar\psi(t), \\ \bar\psi(T) = -\bar\varphi, \end{cases} \tag{3.15}$$

并在 (3.14) 中令 $\varepsilon\to 0+$，我们得到

$$\begin{aligned} 0 &\le \bar\varphi_0 Y^0 + \langle\bar\varphi, Y(T)\rangle \\ &= -\bar\psi_0 \int_0^T \langle f_y^0(t,\bar y(t),\bar u(t)), Y(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\ &\quad -\bar\psi_0 \int_0^T \Big[f^0(t,\bar y(t),u(t)) - f^0(t,\bar y(t),\bar u(t))\Big]\,\mathrm{d}t \\ &\quad +\langle\bar\varphi, Y(T)\rangle \\ &= -\bar\psi_0 \int_0^T \Big[f^0(t,\bar y(t),u(t)) - f^0(t,\bar y(t),\bar u(t))\Big]\,\mathrm{d}t \\ &\quad -\int_0^T \langle\bar\psi(t), f(t,\bar y(t),u(t)) - f(t,\bar y(t),\bar u(t))\rangle\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

即

$$\int_0^T \Big[\mathcal{H}(t,\bar y(t),\bar u(t),\bar\psi_0,\bar\psi(t)) - \mathcal{H}(t,\bar y(t),u(t),\bar\psi_0,\bar\psi(t))\Big]\mathrm{d}t \ge 0, \qquad \forall\ u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T],$$

其中

$$\mathcal{H}(t,y,u,\psi_0,\psi) = \psi_0 f^0(t,y,u) + \langle\psi, f(t,y,u)\rangle, \qquad \forall\ (t,y,u,\psi_0,\psi)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

由此，仿定理 2.2 的证明可得 (3.2)．最后, 我们来证明 (3.1)．

如果 $\bar{\psi}_0 \neq 0$, 则 (3.1) 成立．反之，如果 $\bar{\psi}_0 = 0$，我们要证

$$\bar{\psi}(t) \neq 0, \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

由 (3.15),

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\psi}(t)}{\mathrm{d}t} = -f_y(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))\bar{\psi}(t).$$

由此，如果对某个 $t \in [0, T]$, $\bar{\psi}(t) = 0$, 则

$$\bar{\psi}(t) \equiv 0.$$

特别 $\bar{\psi}(T) = 0$, 这与

$$\bar{\psi}_0^2 + |\bar{\psi}(T)|^2 = \bar{\varphi}_0^2 + |\bar{\varphi}|^2 = 1$$

矛盾．这就证明了 (3.1)． □

例 3.1 考虑如下变分问题*:*

$$\begin{aligned} &\min \int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x, \\ &s.t. \int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x = 1/6, \quad \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 1, \quad g(x) \geq 0. \end{aligned}$$

解: 引入方程 *(*函数 $g(\cdot)$ 即为控制函数 $u(\cdot)$*)*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} xu(x) \\ u(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in [0, 1], \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

以及指标

$$J(u(\cdot)) = \int_0^1 u^2(x)\mathrm{d}x,$$

则问题就化为在约束条件

$$y(1)=\begin{pmatrix}1/6\\1\end{pmatrix}$$

下，在函数集

$$\mathscr{U}\equiv\{u(\cdot)\in L^2[0,1]\Big|u(x)\geq 0\}$$

中最小化泛函 $J(\cdot)$. 这是一个典型的最优控制问题. 不难证明这个问题的解是存在惟一的. 现设 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 为最优对, 则由定理 *3.1*, 并参见注记 *6*, 有 $\bar{\psi}_0\leq 0$ 和 $\bar{\psi}(\cdot)$ 满足

$$\bar{\psi}_0^2+|\bar{\psi}(x)|^2>0,\qquad \forall\ x\in[0,1],$$
$$\frac{\mathrm{d}\bar{\psi}}{\mathrm{d}x}=0,$$

以及如下的最大值条件:

$$\begin{aligned}&\bar{\psi}_0\bar{u}^2(x)+\langle\bar{\psi}(x),\begin{pmatrix}x\bar{u}(x)\\\bar{u}(x)\end{pmatrix}\rangle\\=\;&\max_{u\geq 0}\Big\{\bar{\psi}_0u^2+\langle\bar{\psi}(x),\begin{pmatrix}xu\\u\end{pmatrix}\rangle\Big\},\qquad \text{a.e. } x\in[0,1].\end{aligned}$$

即存在不全为零的常数 $a\leq 0$, $b,c\in\mathbb{R}$, 使得

$$\begin{aligned}a\bar{u}^2(x)+bx\bar{u}(x)+c\bar{u}(x)=\max_{u\geq 0}(au^2+bxu+cu),\\\text{a.e. } x\in[0,1].\end{aligned}\tag{3.16}$$

接下来的事情, 一般没有统一的笔算方法, 解的具体表达式往往也是解不出来的. 但本例恰好可以求出解的表达式. 具体地, 我们需要对 a,b,c 的取值情况进行讨论.

首先可以断定 a 不会是 0, 否则, 注意到必要条件告诉我们 *(3.16)* 式中的最大值是几乎处处存在的, 因而应该有

$$bx+c\leq 0,\qquad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

进一步, 由于 a,b,c 不全为零 (从而 b,c 不全为零), 又可以得到

$$bx+c<0, \qquad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

从而

$$\bar{u}(x)=0, \qquad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

由于 $\bar{u}(\cdot)\equiv 0$ 不满足约束条件, 因此这是不可能的.

接下来，就有 $a<0$, 显然，此时不妨假设 $a=-\frac{1}{2}$. 我们再对 b,c 的情况进行讨论. 不难由 (3.16) 得到

$$\bar{u}(x)=\begin{cases} bx+c, & bx+c>0, \\ 0, & bx+c\le 0, \end{cases} \qquad \text{a.e. } x\in[0,1]. \tag{3.17}$$

情形 *I*: $b+c\ge 0, c\ge 0$. 即

$$bx+c\ge 0, \qquad \forall\ x\in[0,1].$$

此时由 (3.17),

$$\bar{u}(x)=bx+c, \qquad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

由约束条件得

$$\begin{cases} \dfrac{b}{2}+c=1, \\ \dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{2}=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

解得 $b=-4, c=3$, 与 $b+c\ge 0$ 矛盾.

情形 *II*: $b+c\le 0, c\le 0$. 即

$$bx+c\le 0, \qquad \forall\ x\in[0,1].$$

此时由 (3.17) 得

$$\bar{u}(x)=0, \qquad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

显然与约束条件矛盾.

情形 *III*: $b+c>0, c<0$. 即 $bx+c$ 在 $[0,1]$ 上先负后正, 此时必有 $b>0$, 且由 *(3.17)*,

$$\bar{u}(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,-c/b], \\ bx+c, & x\in(-c/b,1], \end{cases} \qquad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

由约束条件得

$$\begin{cases} \frac{b}{2}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)+c\left(1+\frac{c}{b}\right)=1, \\ \frac{b}{3}\left(1+\frac{c^3}{b^3}\right)+\frac{c}{2}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 1+\frac{2c}{b}+\frac{c^2}{b^2}=\frac{2}{b}, \\ 1+\frac{3c}{2b}-\frac{c^3}{2b^3}=\frac{1}{2b}. \end{cases}$$

注意到

$$\begin{aligned} & 1+\frac{3c}{2b}-\frac{c^3}{2b^3} \\ = \ & 1+\frac{2c}{b}+\frac{1}{2}\left(-\frac{c}{b}-\frac{c^3}{b^3}\right) \\ \geq \ & 1+\frac{2c}{b}+\sqrt{\frac{c}{b}\frac{c^3}{b^3}} \\ = \ & \frac{2}{b}>\frac{1}{2b}. \end{aligned}$$

我们就得到矛盾.

情形 *IV*: $b+c<0, c>0$. 即 $bx+c$ 在 $[0,1]$ 上先正后负, 此时必有 $b<0$, 且由 *(3.17)*,

$$\bar{u}(x)=\begin{cases} bx+c, & x\in[0,-c/b], \\ 0, & x\in(-c/b,1], \end{cases} \qquad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

由约束条件得

$$\begin{cases} \dfrac{c^2}{2b} - \dfrac{c^2}{b} = 1, \\ -\dfrac{c^3}{3b^2} + \dfrac{c^3}{2b^2} = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

解得

$$b = -4, \quad c = 8,$$

以及

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} 8 - 4x, & x \in [0, 1/2], \\ 0, & x \in (1/2, 1], \end{cases} \qquad \text{a.e. } x \in [0, 1]. \tag{3.18}$$

由上面的讨论可见, *(3.18)* 定义的 $\bar{u}(\cdot)$ 是惟一满足最大值原理和约束条件的控制, 因而它必然是最优控制.

最后我们可以算得该变分问题的泛函最小值为 $\dfrac{8}{3}$.

注记

1. 最大值原理的提出和建立主要归功于 L. S. Pontryagin（1908—1988). Pontryagin 是苏联一位著名的数学家，在研究控制理论之前，已经在拓扑学研究方面取得了重大的成就. 1952 年，Pontryagin 完全改变了他的研究方向, 开始研究应用数学问题，特别是微分方程和控制理论. 1956 年，Pontryagin 和他的同事们提出了最大值原理. 1958 年，他们首先公布了关于线性系统时间最优控制的最大值原理的证明，1960 年，完成了一般形式的最大值原理的证明. 1961 年，与其学生 V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze 和 E. F. Mishchenko 合作出版了《最佳过程的数学理论》[43](有中译本). 与人们通常所认为的不同，Pontryagin 研究方向的改变事实上并不是非常突然的. 早在二十世纪 30 年代，他就与他的好友，物理学家 A. A. Andronov 时常讨论震荡理论和自动控制理论. 并且在 1932 年与 Andronov 合作写了有关动态系统的论文.

2. 一般认为，最优控制理论是变分学的发展 (而不属于变分学). 但是美国著名控制理论专家 Berkovitz 在 1961 年就用以 Young 为主要代表的芝加哥学派在二十世纪三十年代发展的变分学方法推导出了最大值原理. 这一方法后来又得到 Gamkrelidze 的发扬光大. 其基础本质上就是后来所称的“松弛控制理论”. 在松弛控制理论的建立中，芝加哥学派的代表人物之一 McShane 和另一位控制理论专家 Warga 同样做出了重要的贡献.

3. 我国的控制论研究工作者对最优控制理论的发展作出了重要的贡献. 特别是自二十世纪八十年代以来，以李训经为代表的复旦学派在分布参数系统的最优控制理论方面取得了国际公认的成就. 有关工作可参看李训经和雍炯敏的专著 [30].

4. 对于初始状态和终端状态在某一个凸闭集的情形，我们可以利用第三节的方法类似地加以推导最大值原理. 这时候需要用到凸函数 (具体地，在这里是点到给定凸集的距离函数) 的微分性质. 有关凸函数在这方面的结果，我们介绍如下：

   设 $F\subset \mathbf{R}^n$ 是一个非空凸闭集，它的距离函数定义为

$$d_F(x)\triangleq \inf_{y\in F}|x-y|,$$

   则 $d_F(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的凸函数，且满足 Lipschitz 条件：

$$|d_F(x)-d_F(y)|\le |x-y|.$$

   定义 $d_F(\cdot)$ 的次微分为

$$\partial d_F(x)=\{\zeta\in\mathbf{R}^n|\, d_F(y)-d_F(x)\ge\langle\zeta,y-x\rangle,\ \forall\, y\in\mathbf{R}^n\},$$

   则我们有

   (i) 对任何 $x\in\mathbf{R}^n$, $\partial d_F(x)$ 是非空的有界凸闭集，且对任何 $\xi,y\in\mathbf{R}^n$,

$$d_F^0(x,\zeta)\triangleq\lim_{\rho\downarrow 0}\frac{d_F(x+\rho\xi)-d_F(x)}{\rho}=\max\{\langle\xi,\zeta\rangle|\,\zeta\in\partial d_F(x)\}.$$

   进一步，$\partial d_F(x)$ 可以表示为

$$\partial d_F(x)=\{\zeta\in\mathbf{R}^n|\,\langle\xi,\zeta\rangle\le d_F^0(x,\zeta),\quad \forall\,\xi\in\mathbf{R}^n\}.$$

   (ii) 对任何 $x\notin F$，

$$|\zeta|=1,\qquad \forall\,\zeta\in\partial d_F(x).$$

   从而, 此时 $\partial d_F(x)$ 一定是单点集.

(iii) 如果 $x_\alpha \to x, \zeta_\alpha \to \zeta$, 其中 $\zeta_\alpha \in \partial d_F(x_\alpha)$, 则

$$\zeta \in \partial d_F(x).$$

(iv) 函数 $d_F^2(\cdot)$ 连续可微. 且

$$Dd_F^2(x) = \begin{cases} 2d_F(x)\zeta, & \text{如果 } x \notin F, \quad \text{其中 } \{\zeta\} = \partial d_F(x), \\ 0, & \text{如果 } x \in F. \end{cases}$$

5. 当初始状态和终端状态不是完全固定的, 而只是限制在给定的非空凸闭集中时, 最优对所满足的最大值原理可以利用上面关于距离函数的性质仿定理 3.1 的证明得到. 此时, 定理 3.1 中的结论仍然成立 (事实上, 如果只是要得到这些结论, 我们并不需要重新推导). 而且我们还有关于最优轨线的初始状态和终端状态所满足的横截条件:

$$\left\langle \bar\psi(0), y_0 - \bar y(0) \right\rangle \le 0, \qquad \forall\, y_0 \in Q_0,$$
$$\left\langle \bar\psi(T), y_T - \bar y(T) \right\rangle \ge 0, \qquad \forall\, y_T \in Q_T,$$

其中非空凸闭集 Q_0, Q_T 分别是初始状态和终端状态所在的约束集.

6. 在本章的假设条件中, 含有 f, f^0 关于控制变量 u 的某种一致有界性, 这一假设并不是本质的. 例如, 对于后面的习题 9, 本章定理中的结论仍然成立.

7. 定理 3.1 和定理 2.1 的结论, 最大的区别点是定理 3.1 中出现了 $\bar\psi_0$. 我们指出, 如果 $\bar\psi_0 \ne 0$, 则不妨认为 $\bar\psi_0 = -1$. 这时, 最大值原理就与定理 2.1 中的结论一样. 而当我们把定理 3.1 的结论推广到初始状态和终端状态不完全固定的情形后, 相应的结论 (见注记 5) 就可以推出定理 2.1.

8. 在定理 3.1 的最大值原理中，条件 (3.1) 是非常重要的. 失去这样的条件，最大值原理也就失去了意义. 因为如果 $\bar\psi_0^2 + |\bar\psi(t)|^2 \equiv 0$, 则相应的共轭方程和最大值条件是平凡成立的. 这一点，是今后在推导最大值原理时，特别是在处理无限维最优控制问题时特别要注意的.

9. 在定理 3.1 中，当 f, f^0 与 t 无关时，则从最大值原理可以推导出以下结论：

$$\max_{u\in U}\{\bar\psi_0 f^0(\bar y(t), u) + \langle \bar\psi(t), f(\bar y(t), u)\rangle\}$$

为常数.

10. 对于时间不固定的最优控制问题, 可以通过引入新的变量化为时间固定的最优控制问题. 例如, 当初始时刻 $t_0 = 0$ 固定, 而终端时刻 $T > 0$ 不固定时, 可以令 $t = Ts$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = T, \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = 0, \qquad s \in [0,1].$$

把 t, T 都看作新的状态变量, s 视为时间变量, 则原问题化为时间固定的最优控制问题.

习题

1. 对于 $\mathbf{R}^n$ 上的向量值函数 $f(\cdot) = (f^1(\cdot), \cdots, f^m(\cdot))$. 一般地，定义 (参见 (1.3)—(1.4))[6]

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f^1}{\partial x_2} & \frac{\partial f^2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial x_n} & \frac{\partial f^2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

1) 设 $A_{m\times n}$ 为常值矩阵，

$$f(x) = Ax.$$

验证

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A^\top.$$

2) 设 $f(\cdot), g(\cdot)$ 都是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上取值于 $\mathbf{R}^m$ 中的连续可微的向量值函数. 又 $x(\cdot)$ 是 $[t_0, T]$ 上取值于 $\mathbf{R}^n$ 中的连续可微的向量值函数. 验证

$$\frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^\top \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

进一步，当 A 为常值矩阵时

$$\frac{\mathrm{d}\Big(Ax(t)\Big)}{\mathrm{d}t} = A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f(x(t)), g(x(t))\rangle = \langle f_x(x(t))g(x(t)) + g_x(x(t))f(x(t)), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\rangle.$$

3) 对于 2) 中的 f, g，直接验证

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle f, g\rangle = f_x g + g_x f.$$

[6] 当 $m = 1$ 时，这里的定义与函数梯度的定义一致，但是当 $n = 1$ 时，按这里的定义，f_x 是一个行向量，与通常的向量值函数的导数定义不符. 这确实是一个记号上矛盾的地方，但一般说来，此时 f_x 究竟表示行向量还是列向量可以通过上下文弄清楚.

2. 设

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)y(t) + f(t), \\ y(t_0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = B(t)\varphi(t) + g(t).$$

验证：在一定的光滑性条件下，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle y(t), \varphi(t)\rangle = \langle [A(t)^\top + B(t)]\varphi(t), y(t)\rangle + \langle f(t), \varphi(t)\rangle + \langle g(t), y(t)\rangle.$$

由此计算

$$\int_{t_0}^{T} \langle g(t), y(t)\rangle \ \mathrm{d}t,$$

并选择 $B(\cdot)$ 以及适当的 $\varphi(t_0)$ 或 $\varphi(T)$, 使计算结果中不显含 $y(\cdot)$.

3. 设 $A(\cdot) \in L^\infty(t_0, T; \mathbf{R}^{n\times n})$, 对任何 $f(\cdot) \in L^2(t_0, T; \mathbf{R}^n)$, $y(\cdot) \equiv y(\cdot; f(\cdot))$ 由 (1) 定义. 令

$$F(f) \equiv \int_{t_0}^{T} \langle g(t), y(t)\rangle \mathrm{d}t.$$

证明：F 是 $L^2(t_0, T; \mathbf{R}^n)$ 上的一个有界线性泛函, 从而由 Riesz 表示定理，存在惟一的 $h(\cdot) \in L^2(t_0, T; \mathbf{R}^n)$ 使得

$$F(f) = \int_{t_0}^{T} \langle h(t), f(t)\rangle \mathrm{d}t.$$

试求出 $h(\cdot)$ 或 $h(\cdot)$ 所满足的方程.

4. 在上一题中，若令

$$F(f) \equiv \int_{t_0}^{T} \langle g(t), y(t)\rangle \mathrm{d}t + \langle g_0, y(T)\rangle,$$

其中 $g_0 \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为常值向量, 情况又如何？

5. 详细推导 (2.5)，并说明每一步成立的理由.

6. 说明积分型的最大值条件 (2.15) 与最大值条件 (2.7) 的等价性.

7. 试利用 Filippov 引理，由 (2.15) 推导 (2.7).

8. 在定理 2.1 中，假设 U 只是一般的凸集，试利用证明定理 2.1 的方法，推导该情形下最优对所满足的最大值原理.

9. 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad t \in [0, 4], \\ x(0) = 2, \end{cases}$$

以及性能指标

$$J(u(\cdot)) = \int_0^4 \Big(2u(t)x(t) - u^2(t) - 2x^2(t)\Big)\,\mathrm{d}t.$$

求使得 $J(u(\cdot))$ 达到最大的 $u(\cdot) \in L^2(0,4)$.

10. 求解例 3.1 的一般化问题: 即对于 $\alpha \in (0,1)$, 考虑如下变分问题:

$$\min \int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x,$$
$$s.t. \int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x = \alpha, \quad \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 1, \quad g(x) \geq 0.$$

11. 证明：由 (3.7) 定义的 d 使 $(\mathscr{U}[0,T],d)$ 成为完备的度量空间.
12. 推导初始状态和终端状态在给定凸集中时，最优对所满足的最大值原理与最优初始状态、终端状态所满足的横截条件.
13. 举例说明在定理 3.1 中, $\bar{\psi}_0 = 0$ 是可能的.
14. 分别叙述并证明 Bolza 问题和 Mayer 问题的最大值原理.
15. 试利用时间固定时最优控制问题的最大值原理讨论时间不固定时最优控制问题的最大值原理.

第六章 动态规划方法

§1. 引言

本章要介绍的是研究最优控制问题的另一种重要的方法 —**动态规划方法**. 这一方法是 Richard Bellman 在二十世纪 50 年代初研究控制问题时引入的. 首先，我们陈述将要讨论的最优控制问题. 给定 $y_0 \in \mathbb{R}^n$, 考虑以下控制系统：

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad \text{a.e. } t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $T > 0$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ 为一给定的映射，$y : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ 为状态轨线，而控制 $u(\cdot)$ 取值于控制集

$$\mathscr{U}[0, T] \triangleq \{u : [0, T] \to U \,\big|\, u(\cdot) \text{ 可测}\}, \tag{1.2}$$

这里 U 为度量空间. 对应于方程 (1.1) 的性能指标为

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T f^0(t, y(t), u(t))\mathrm{d}t + h(y(T)), \tag{1.3}$$

其中 f^0 和 h 均为给定的映射. 在适当的条件下，可以保证对任何 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, T]$，状态方程 (1.1) 有惟一的解 $y(\cdot) \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$，并使得 (1.3) 有定义. 此时，最优控制问题可叙述如下：

问题 (D). 对于系统 (1.1), 在 $\mathscr{U}[0, T]$ 中寻找一个元素，使之最小化 (1.3).

如果

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathscr{U}[0, T]} J(u(\cdot)) > -\infty,$$

则问题 (D) 称为**有限**的. 进一步，如果存在 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$, 使得

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[0,T]} J(u(\cdot)), \tag{1.4}$$

则称问题 (D) 是**可解**的. 任何满足 (1.4) 的 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}[0,T]$ 就称为**最优控制**, 相应地，$\bar{y}(\cdot) \equiv y(\cdot\,;\bar{u}(\cdot))$ 称为**最优轨线**，而 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 称为**最优对**. 在上面的框架下，初始时间 $(t=0)$ 以及初始状态 $(y(0)=y_0)$ 是固定的. 而**动态规划**方法的基本思想则是考虑一系列最优控制问题，它们具有不同的初始时间和初始状态. 自然，这一系列问题相互之间是按照时间的发展而紧密地联系在一起的. 这一思想将使我们在处理原问题 (D) 时，步入一个新的天地. 现在，我们来详细叙述这一思想. 首先，我们重置问题 (D) 使之具有不同的初始时间和初始状态 (t,x). 设 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$，考虑定义在时间区域 $[t,T]$ 上的以下控制系统 (试与 (1.1) 比较):

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = f(s,y(s),u(s)), & \text{a.e. } s\in[t,T], \\ y(t) = x, \end{cases} \tag{1.5}$$

这里，控制 $u(\cdot)$ 取值于如下集合 (请与 (1.2) 比较)：

$$\mathscr{U}[t,T] \overset{\triangle}{=} \{u:[t,T]\to U \mid u(\cdot) \text{ 可测}\},$$

性能指标为 (请与 (1.3) 比较)[1]

$$J(u(\cdot);t,x) = \int_t^T f^0(s,y(s),u(s))\mathrm{d}s + h(y(T)), \tag{1.6}$$

相应的最优控制问题可叙述为：

问题 ($\mathbf{D}_{tx}$). 对于给定的 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$, 对应于系统 (1.5), 在 $\mathscr{U}[t,T]$ 中寻找一个元素，使之最小化 (1.6). 上面给出了以 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 为参数的一簇最优控制问题，而问题 (D) 则

[1] 对于 $t=T$, 自然可以定义 $J(u(\cdot);T,x)=h(x)$.

被“嵌入”到这一簇问题之中．事实上，当 $t=0,\ x=y_0$ 时，问题 (D_{tx}) 就是问题 (D)．对问题 (D_{tx}) 的研究使我们得以看到关于问题 (D) 的一些有趣的“动态”性质．为了进一步的研究，我们作如下假设：

(D1) (U,d) 是一个可分度量空间，$T>0$．

(D2) 映射 $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$, $f^0:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$ 以及 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 均一致连续．进一步，存在常数 $L>0$, 使得对于 $\varphi=f,f^0,h$, 成立着

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u)-\varphi(t,y,u)|\le L|x-y|, \\ \qquad\qquad \forall\ t\in[0,T]; x,y\in\mathbb{R}^n; u\in U, \\ |\varphi(t,0,u)|\le L, \quad \forall\ (t,u)\in[0,T]\times U. \end{cases}$$

以下命题是我们以后研究的一个基础.

命题 1.1. 设(D1)—(D2) 成立, 则对任何 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 以及 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]$, (1.5) 有惟一的解 $y(\cdot)\equiv y(\cdot\,;t,x,u(\cdot))$, 而性能指标 (1.6) 是有定义的. 进一步, 存在常数 $K>0$ 使得

$$\begin{aligned} &|y(s;t,x,u(\cdot))|\le K(1+|x|), \\ &\qquad\qquad \forall\ s\in[t,T],\ u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T],\ (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.7}$$

以及

$$\begin{aligned} &\quad |y(s;t,x,u(\cdot))-y(s;\bar t,\bar x,u(\cdot))| \\ &\le K\big\{|x-\bar x|+(1+|x|\vee|\bar x|)|t-\bar t\,|\big\}, \\ &\ \forall\ t,\bar t\in[0,T],\ x,\bar x\in\mathbb{R}^n,\ s\in[t\vee\bar t,T],\ u(\cdot)\in\mathscr{U}[t\wedge\bar t,T]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

命题的证明可以用 Gronwall 不等式得到．希望读者自己给出完整的证明．由上述命题可见，在条件 (D1)—(D2) 下, 问题 (D_{tx})

是有意义的，而且我们可以定义如下函数：

$$\begin{cases} V(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in \mathscr{U}[t,T]} J(u(\cdot);t,x), & \forall\ (t,x)\in[0,T)\times \mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = h(x), & \forall\ x\in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.9}$$

我们称 $V(\cdot,\cdot)$ 为问题 (D) 的**值函数**. 该函数在问题 (D) 的讨论中占有重要的地位. 因此，我们将相当详细地研究 $V(\cdot,\cdot)$. 下面，我们来看两个例子.

例 1.1. 考虑 $\mathbb{R}$ 中的系统:

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = u(s), \\ y(t) = x, \end{cases} \tag{1.10}$$

具有控制区域 $U = [-1,1]$ 以及性能指标

$$J(u(\cdot);t,x) = y(T;t,x,u(\cdot)).$$

我们来计算相应控制问题的值函数. 显然, 对于固定的 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, 我们有

$$J(u(\cdot);t,x) = x + \int_t^T u(s)\mathrm{d}s.$$

这样,

$$V(t,x) = x - (T-t),$$

且最优控制为

$$\bar{u}(s) = -1, \qquad \text{a.e. } s\in[t,T].$$

相应的最优轨线为

$$\bar{y}(s) = x - (s-t), \qquad s\in[t,T].$$

在上面的例子中，值函数 $V(\cdot,\cdot)$ 是光滑的 (事实上还是解析的). 在下面的例子中，我们将看到一般说来，情况并非如此.

例 1.2. 考虑系统 (1.10), 控制区域仍为 $U=[-1,1]$, 但性能指标为

$$J(u(\cdot);t,x)=|y(T;t,x,u(\cdot))|.$$

此时，我们有

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]}\left|x+\int_t^T u(s)\mathrm{d}s\right| \\ &= \begin{cases} (x-T+t)^+, & x>0, \\ (x+T-t)^-, & x\le 0. \end{cases} \end{aligned}$$

这样, 值函数 $V(t,x)$ 是 Lipschitz 连续的, 但在两条直线 $x=\pm(T-t)$ 上不是 C^1 的. 而

$$\bar{u}(s)=\begin{cases} -\chi_{[t,(t+x)\wedge T]}(s), & x>0, \\ \chi_{[t,(t-x)\wedge T]}(s) & x\le 0. \end{cases}$$

是一个最优控制. 自然，我们也可以计算相应的最优轨线 $\bar{y}(\cdot)$.

人们可能会认为上述例子中值函数的非光滑性是由于性能指标中的非光滑项 $y\mapsto|y|$ 所引起的. 事实上，我们今后将看到，甚至当控制问题中涉及到的项都是光滑的时候，值函数仍然可以是不光滑的.

§2. 动态规划方法和 HJB 方程

这一节将研究由 (1.9) 定义的值函数的一些基本性质. 我们总是假设 (D1)—(D2) 成立. 首先，我们有:

命题 2.1. 设(D1)—(D2) 成立, 则存在常数 $K>0$, 满足

$$|V(t,x)| \le K(1+|x|), \qquad \forall\ (t,x) \in [0,T]\times \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}|V(t,x)-V(\bar t,\bar x)| \le\ & K\Big\{|x-\bar x| + (1+|x|\vee|\bar x|)|t-\bar t\,|\Big\},\\ & \forall\ (t,x),(\bar t,\bar x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.\end{aligned} \tag{2.2}$$

证明. 由命题 1.1, 我们有

$$\begin{aligned}&|J(t,x;u(\cdot))| \le K(1+|x|),\\ &\qquad \forall\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n, u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T].\end{aligned}$$

由此即可得到 (2.1). 另一方面,

$$\begin{cases}|J(u(\cdot);t,x)-J(u(\cdot);t,\bar x)| \le K|x-\bar x|,\\ \qquad \forall\ t\in[0,T),\ x,\bar x\in\mathbb{R}^n,\ u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T],\\ |J(u(\cdot);t,x)-J(u(\cdot);\bar t,x)| \le K(1+|x|\vee|\bar x|)|t-\bar t\,|,\\ \qquad \forall\ t,\bar t\in[0,T),\ x,\bar x\in\mathbb{R}^n,\ u(\cdot)\in\mathscr{U}[t\wedge\bar t,T].\end{cases}$$

这就得到了 (2.2). 注意在 (2.2) 的证明中, 在点 $t=T$, 我们利用了 h 的 Lipschitz 连续性. □

下面, 我们来介绍著名的 **Bellman 最优性原理**. 对于某个 $\hat t\in(0,T)$, 我们考虑一类在 $[0,\hat t]$ 上取固定值的控制控制类, 对于每一个这样的控制 $u(\cdot)$,

$$\begin{aligned}J(u(\cdot)) &= \int_0^T f^0(t,y(t;0,y_0,u(\cdot)),u(t))\,\mathrm{d}t + g(y(T;0,y_0,u(\cdot)))\\ &= \int_0^{\hat t} f^0(t,y(t;0,y_0,u|_{[0,\hat t]}(\cdot)),u|_{[0,\hat t]}(t))\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_{\hat t}^T f^0(t,y(t;\hat t,y(\hat t)),u|_{[\hat t,T]}(\cdot))\,\mathrm{d}t\\ &\quad+g(y(T;\hat t,y(\hat t),u|_{[\hat t,T]}(\cdot))).\end{aligned} \tag{2.3}$$

注意上面最后一个等式的右边，第一项的值与 $u(\cdot)$ 在 $[\hat{t},T]$ 上的取值无关，而后两项的值除去依赖于 $u|_{[\hat{t},T]}$, $\hat{t}$ 以及 $y(\hat{t})$ 以外，与 $u(\cdot)$ 在 $[0,\hat{t}]$ 上的取值无关．显然，在我们所考虑的这一类控制中，要取适当的控制使性能指标最小, 则应该在 $[\hat{t},T]$ 上选取 $u(\cdot)$ 的适当的值，使得 (2.3) 中后两项达到最小．这恰好就是问题 $(D_{\hat{t}y(\hat{t})})$ 所考虑的问题．进一步，按上面的分析，如果 $\bar{u}(\cdot)$ 是问题 (D) 的一个最优控制，那么，$\bar{u}(\cdot)$ 在 $[\hat{t},T]$ 上的限制 $\bar{u}|_{[\hat{t},T]}(\cdot)$ 必然是局部问题 $(D_{\hat{t}\bar{y}(\hat{t})})$ 的最优控制 (这里 $\bar{y}(\cdot)$ 是原问题相应于最优控制 $\bar{u}(\cdot)$ 的最优轨线)．这一论点可以简单地表述为

总体最优 $\Longrightarrow$ 局部最优.

这正是 Bellman 最优性原理的精髓所在．同时，它也给出了最优控制所满足的一个必要条件．根据上面的讨论，我们可以直观地看出，当 $u(\cdot)$ 在 $[0,\hat{t}]$ 的取值固定时，$J(u(\cdot))$ 的最小值 (下确界) 应该是

$$\int_0^{\hat{t}} f^0(t,y(t;0,y_0,u|_{[0,\hat{t}]}(\cdot)),u|_{[0,\hat{t}]}(t))\,\mathrm{d}t+V(\hat{t},y(\hat{t})). \tag{2.4}$$

这样，在所有的控制中，要使得 $J(u(\cdot))$ 达到最小, 应该选取 $u(\cdot)|_{[0,\hat{t}]}$ 使得 (2.4) 达到最小．事实上, 我们的确有这样的结果：

定理 2.2. (**Bellman 最优性原理**) 设 (D1)—(D2) 成立, 则对任何 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned} V(t,x)=\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,\hat{t}]}\Big\{ & \int_t^{\hat{t}} f^0(s,y(s;t,x,u(\cdot)),u(s))\mathrm{d}s \\ & +V(\hat{t},y(\hat{t};t,x,u(\cdot)))\Big\}, \\ & \forall\ 0\le t\le\hat{t}\le T. \end{aligned} \tag{2.5}$$

证明. 如果问题 (D_{tx}) 具有最优控制，则定理证明的思想已经包含在定理叙述前的讨论当中．这里我们需要的只是将前面的讨

论稍许严格化以包含最优控制可能不存在的情形. 暂记 (2.5) 的右端为 $\overline{V}(t,x)$. 由值函数的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
& V(t,x) \le J(u(\cdot);t,x) \\
= \quad & \int_t^{\hat{t}} f^0(s,y(s),u(s))\mathrm{d}s + J(u|_{[\hat{t},T]}(\cdot);\hat{t},y(\hat{t};t,x,u|_{[t,\hat{t}]}(\cdot))), \\
& \qquad \forall\ u(\cdot) \in \mathscr{U}[t,T].
\end{aligned}
$$

先关于 $u|_{[\hat{t},T]}(\cdot) \in \mathscr{U}[\hat{t},T]$ 取下确界, 然后再对 $u|_{[t,\hat{t}]}(\cdot) \in \mathscr{U}[t,\hat{t}]$ 取下确界, 我们得到

$$
V(t,x) \le \overline{V}(t,x). \tag{2.6}
$$

另一方面，对任何 $u(\cdot) \in \mathscr{U}[t,T]$,

$$
\begin{aligned}
J(u(\cdot);t,x) \quad &= \quad \int_t^{\hat{t}} f^0(s,y(s),u(s))\mathrm{d}s + J(u(\cdot);\hat{t},y(\hat{t};t,x,u|_{[t,\hat{t}]}(\cdot))) \\
&\ge \quad \int_t^{\hat{t}} f^0(s,y(s),u(s))\mathrm{d}s + V(\hat{t},y(\hat{t};t,x,u|_{[t,\hat{t}]}(\cdot))) \\
&\ge \quad \overline{V}(t,x).
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

结合 (2.6)—(2.7) 即得 (2.5). □

关系式 (2.5) 称为**动态规划方程**. 该方程给出了问题类 (D_{tx}) 中不同问题之间基于值函数的联系. 然而这一方程的一大不足是 (2.5) 右端的表达式过于复杂以致于难以处理. 因而我们希望能够更深入地研究 (2.5) 以得到值函数 $V(t,x)$ 的一个比较简单的方程. 下面的结果给出了连续可微的值函数所满足的偏微分方程.

命题 2.3. 设 (D1)—(D2) 成立，且值函数 $V \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, 则 $v=V$ 满足以下的一阶偏微分方程终值问题:

$$
\begin{cases}
-v_t + \sup\limits_{u\in U} H(t,x,u,-v_x) = 0, \qquad (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n, \\
v\Big|_{t=T} = h(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n,
\end{cases} \tag{2.8}
$$

其中,

$$\begin{aligned} H(t,x,u,p) = \langle p, f(t,x,u)\rangle - f^0(t,x,u), \\ \forall\ (t,x,u,p)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.9}$$

我们称 (2.8) 为问题 (D) 的 **Hamilton-Jacobi-Bellman** (简称 **HJB 方程**), 而由 (2.9) 定义的函数 $H(t,x,u,p)$ 称为 **Hamilton 函数**.

证明. 固定 $u\in U$. 令 $y(\cdot)$ 为相应于 $u(s)\equiv u$ 的状态轨线. 利用 (2.5) 并令 $\hat t\downarrow t$, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\frac{V(\hat t,y(\hat t))-V(t,x)}{\hat t-t}-\frac{1}{\hat t-t}\int_t^{\hat t} f^0(s,y(s),u)\mathrm{d}s \\ &\to -V_t(t,x)-\langle V_x(t,x),f(t,x,u)\rangle - f^0(t,x,u), \qquad \forall\ u\in U. \end{aligned}$$

由此可得

$$0\geq -V_t(t,x)+\sup_{u\in U}H(t,x,u,-V_x(t,x)). \tag{2.10}$$

另一方面，对任何 $\varepsilon>0$, $0\leq t<\hat t\leq T$, 存在 $u(\cdot)\equiv u_{\varepsilon,\hat t}(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]$, 使得

$$V(t,x)+\varepsilon(\hat t-t)\geq\int_t^{\hat t} f^0(s,y(s),u(s))\,\mathrm{d}s+V(\hat t,y(\hat t)).$$

于是，注意到 $V\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq -\frac{V(\hat t,y(\hat t))-V(t,x)}{\hat t-t}-\frac{1}{\hat t-t}\int_t^{\hat t} f^0(s,y(s),u(s))\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\hat t-t}\int_t^{\hat t}\Big\{-V_t(s,y(s))-\langle V_x(s,y(s)),f(s,y(s),u(s))\rangle \\ &\qquad -f^0(s,y(s),u(s))\Big\}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\hat t-t}\int_t^{\hat t}\Big\{-V_t(s,y(s)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad +H\big(s,y(s),u(s),-V_x(s,y(s))\big)\Big\}\,\mathrm{d}s \\
\le\quad & \frac{1}{\hat{t}-t}\int_t^{\hat{t}}\Big\{-V_t(s,y(s)) \\
&\qquad +\sup_{u\in U} H\big(s,y(s),u,-V_x(s,y(s))\big)\Big\}\,\mathrm{d}s \\
\to\quad & -V_t(t,x)+\sup_{u\in U} H\big(t,x,u,-V_x(t,x)\big), \qquad \text{当 } \hat{t}\downarrow t. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

上面取极限时，我们利用了 $\varphi=f,f^0$ 所满足的

$$
\lim_{t\downarrow s}\sup_{y\in\mathbf{R}^n,u\in U}|\varphi(t,y,u)-\varphi(s,y,u)|=0, \qquad (2.12)
$$

以及对于 $y(\cdot)=y(\cdot;t,x,u_{\varepsilon,\hat{t}}(\cdot))$，

$$
\lim_{\hat{t}\downarrow t}\sup_{s\in[t,\hat{t}]}|y(s)-x|=0.
$$

这些关系式可以由假设 (D2) 中关于函数 f、f^0 的一致连续性和 (1.8) 得到. 结合 (2.10) 及 (2.11) 即得结论. □

对于例 1.1，我们有

$$
\sup_{|u|\le 1} H(t,x,u,p)=\sup_{|u|\le 1} pu=|p|, \\
\forall (t,x,p)\in[0,T)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}.
$$

从而相应的 HJB 为

$$
\begin{cases}
-V_t+|V_x|=0, \\
V\Big|_{t=T}=x.
\end{cases} \qquad (2.13)
$$

容易验证 $V(t,x)=x-(T-t)$ 是方程 (2.13) 的一个经典解.

下面，我们介绍如何利用 HJB 方程的解来寻找最优控制. 假设我们已经从 HJB 方程 (2.8) 解得值函数 $V\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. 进

一步，假设对 $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, 式 (2.8) 中的上确界在 $u=\overline{\mathbf{u}}(t,x)$ 达到, 即

$$
\begin{aligned}
H(t,x,\overline{\mathbf{u}}(t,x),-V_x(t,x)) = \sup_{u\in U} H(t,x,u,-V_x(t,x)),& \\
\forall\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.&
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

而且我们假设对任何 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$, 存在 $\bar{y}(\cdot;t,x)$ 满足下列方程：

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{y}}(s)=f(s,\bar{y}(s),\overline{\mathbf{u}}(s,\bar{y}(s))), & \text{a.e. } s\in[t,T],\\
\bar{y}(t)=x.
\end{cases}
\tag{2.15}
$$

现在，固定 (t,x)，记 $\bar{y}(\cdot)=\bar{y}(\cdot;t,x)$, 并令

$$
\bar{u}(s)=\overline{\mathbf{u}}(s,\bar{y}(s;t,x)), \qquad \forall\ s\in[t,T], \tag{2.16}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}V(s,\bar{y}(s))\\
=\ & V_t(s,\bar{y}(s))+\langle V_x(s,\bar{y}(s)),f(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))\rangle\\
=\ & -f^0(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s)), \qquad s\in[t,T].
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

对 (2.17) 从 t 到 T 积分，我们就得到

$$
V(t,x)=h(\bar{y}(T))+\int_t^T f^0(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))\mathrm{d}s=J(\bar{u}(\cdot);t,x).
$$

这表明 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 是问题 (D_{tx}) 的一组最优对. 上面的讨论告诉我们，一旦我们利用 HJB 方程得到了值函数，那么至少在形式上，我们就可以构造问题 (D_{tx}) 的一组最优对. 特别，利用 (2.14)，我们可以构造原始问题 (D) 的一组最优控制. 这种方法称为**验证方法**.

利用验证方法求解原始问题 (D)，大体上分为以下几个步骤：

步骤 1. 求解 HJB 方程 (2.8) 得到值函数 $V(t,x)$.

步骤 2. 通过 (2.14) 寻找 $\bar{\mathbf{u}}(t,x)$.

步骤 3. 置 $(t,x)=(0,y_0)$，然后求解方程 (2.15) 得到最优对 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$.

总的说来，动态规划法主要有以下几个要点：(1) 引入问题类 (D_{tx}); (2) 定义值函数 $V(t,x)$; (3) 导出最优性原理; (4) 导出 HJB 方程并利用上面的步骤 1—3 得到最优对．利用 HJB 方程，我们可以方便地得到以下结论：

命题 2.4. 设 (D1)—(D2) 成立，且值函数 $V\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. 设 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 是问题(D) 的一组最优对，则:

$$\begin{aligned}&H(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t),-V_x(t,\bar{x}(t)))\\=\;&\max_{u\in U}H(t,\bar{y}(t),u,-V_x(t,\bar{x}(t))),\qquad \text{a.e. } t\in[0,T].\end{aligned}\tag{2.18}$$

证明. 易见对任何 $t\in[0,T]$, $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$(限制在 $[t,T]$ 上) 也是问题 $(\mathrm{D}_{t\bar{y}(t)})$ 的一组最优对, 从而

$$V(t,\bar{y}(t))=\int_t^T f^0(s,\bar{y}(s),\bar{u}(s))\,\mathrm{d}s+g(\bar{y}(T)).$$

上式右端关于 t 几乎处处可导．于是对上式两端求导得到

$$V_t(t,\bar{y}(t))+\langle V_x(t,\bar{y}(t)),f(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))\rangle=-f^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)),\quad \text{a.e. } [0,T].$$

比较上式和 (2.8) 即得 (2.18). □

最后，我们再来看一看例题 1.1．此时，$V(t,x)=x-(T-t)$. 这样由 (2.18)，$\bar{u}$ 应该几乎处处满足

$$H(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t),-V_x(t,\bar{y}(t)))=\max_{|u|\le 1}H(t,\bar{y}(t),u,-V_x(t,\bar{y}(t))),$$

其中 $\bar{y}(\cdot)$ 是相应于 $\bar{u}(\cdot)$ 的状态. 此即

$$-V_x(t,\bar{y}(t))\bar{u}(t)=\max_{|u|\le 1}\big[-V_x(t,\bar{y}(t))u\big],\qquad \text{a.e. } [0,T].$$

从而注意到 $V_x=1$，我们有

$$\bar{u}(t)=-1,\quad \text{a.e. } [0,T].$$

这样我们就求得了最优控制.

§3. 粘性解

从上一节可知，利用动态规划寻找最优控制的关键是确定值函数 $V(\cdot,\cdot)$. 如果 (i) $V\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, 且 (ii)HJB 方程 (2.8) 有惟一的 (经典) 解，则 V 由 HJB 方程 (2.8) 刻画. 然而遗憾的是一般说来，(i) 可能都不成立, 而 HJB 方程也不一定总是有经典解. 如果降低解的要求, 比如说只要求 (2.8) 几乎处处成立, 则解的惟一性往往得不到保证. 在例 1.2 中我们已经看到值函数不一定是光滑的. 人们也许会认为值函数的非光滑性是由系统本身所涉及的函数的非光滑性引起的. 事实上，下面的例子表明，即使系统和性能指标所涉及的一切函数都是很光滑的，最优控制问题的值函数仍可以是非光滑的.

例 3.1. 考虑一维控制系统:

$$\begin{cases} \dot{y}(s)=u(s)y(s), & \text{a.e. } s\in[t,T],\\ y(t)=x, \end{cases}$$

其中控制函数 $u(\cdot)$ 取值于 $U\equiv[-1,1]$, 性能指标定义为

$$J(u(\cdot))=y(T).$$

我们可以容易地得到

$$y(s) = x\mathrm{e}^{\int_t^s u(r)dr}, \qquad \forall\ s \in [t, T].$$

从而值函数由下式给出

$$V(t,x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{T-t}, & x \le 0, \\ x\mathrm{e}^{t-T}, & x > 0. \end{cases}$$

易见函数 V 只是 Lipschitz 函数，而**不是**$C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ 函数. 在点 $(t,0)$ ($\forall\ t \in [0,T)$)，$V_x(t,x)$ 有一个跳跃. 另一方面，我们有

$$\sup_{u\in U} H(t,x,u,p) = \sup_{|u|\le 1} \Big\{ pux \Big\} = |px|.$$

从而相应的 HJB 方程是

$$\begin{cases} -v_t + |xv_x| = 0, & (t,x) \in [0,T)\times\mathbb{R}, \\ v\Big|_{t=T} = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

我们断言这一方程没有 $C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ 解. 为此, 假设 $v \in C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ 是 (3.1) 的一个解, 则由 (3.1) 的第二式，我们有

$$v_x(T,x) = 1, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

再由 v_x 的连续性, 有 $\varphi : \mathbb{R} \to [0,T)$ 使得

$$v_x(t,x) > 0, \qquad \forall\ (t,x) \in \mathscr{N} \overset{\triangle}{=} \{(t,x) \Big| \varphi(x) \le t \le T\}.$$

进一步，φ 可以取成为偶函数、且关于 $x \ge 0$ 单调不减. 于是，由 (3.1), v 满足

$$\begin{cases} v_t = xv_x, & (t,x) \in \mathscr{N}^+ \overset{\triangle}{=} \mathscr{N} \bigcap \{(t,x) \Big| x \ge 0, t \in [0,T]\}, \\ v\Big|_{t=T} = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

令

$$\begin{cases} \tau = t, \\ z = xe^t, \end{cases} \qquad \Phi(\tau, z) \triangleq v(\tau, ze^{-\tau}). \tag{3.3}$$

我们有

$$\Phi_\tau = v_t + v_x[-ze^{-\tau}] = v_t - xv_x = 0.$$

由此, Φ 不依赖于 τ. 于是我们可以把 $\Phi(\tau, z)$ 写成 $\Phi(z)$. 这样, 由 (3.3) 可得

$$v(t, x) = \Phi(xe^t), \qquad \forall\ (t, x) \in \mathscr{N}^+. \tag{3.4}$$

利用 (3.2) 中的终端条件, 我们有

$$xe^{-T} = v(T, xe^{-T}) = \Phi(x), \qquad \forall\ x \geq 0. \tag{3.5}$$

因此, 结合 (3.4)—(3.5), 可得

$$v(t, x) = xe^{t-T}, \qquad \forall\ (t, x) \in \mathscr{N}^+.$$

类似地, 我们有

$$v(t, x) = xe^{T-t}, \qquad \forall\ (t, x) \in \mathscr{N} \setminus \mathscr{N}^+.$$

从而在 $\mathscr{N}$ 上, v 与 V 相等. 由于 V 不是 $C^1(\mathscr{N})$ 函数, 因而 v 也不是 $C^1(\mathscr{N})$ 函数. 这与假设矛盾.

从上面的例子我们可以看到命题 2.3 的假设过于苛刻. 为了得到既有类似于命题 2.3 那样的严格的存在惟一性又没有苛刻假设的结论，我们需要引入以下概念.

定义 3.1. 函数 $v \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ 称为 (2.8) 的一个**粘性下解**, 如果

$$v(T, x) \leq h(x), \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.6}$$

而且对任何 $\varphi \in C^1([0,T]\times \mathbb{R}^n)$, 只要 $v-\varphi$ 在某一点 $(t,x)\in [0,T)\times \mathbb{R}^n$ 达到极大值, 便成立

$$-\varphi_t(t,x)+\sup_{u\in U} H(t,x,u,-\varphi_x(t,x))\le 0. \tag{3.7}$$

类似地, 函数 $v\in C([0,T]\times \mathbb{R}^n)$ 称为是 (2.8) 的**一个粘性上解**, 如果在 (3.6)—(3.7) 中的不等号 "$\le$ "改为 "$\ge$"、"极大值" 改为 "极小值". 如果 v 既是粘性下解又是粘性上解, 则称 v 为**粘性解**.

我们指出，在上面的定义中，"极大值 (极小值)" 可以用 "严格极大值 (严格极小值)"、乃至 "严格最大值 (严格最小值)" 代替. 我们将这一等价性的证明留给读者. 下面的结果表明尽管值函数可能不是 HJB 方程 (2.8) 的经典解，但它却是 (2.8) 的粘性解.

定理 3.2. 设 (D1)—(D2) 成立, 则值函数 $V(\cdot,\cdot)$ 是 (2.8) 的一个粘性解.

证明. 设 $\varphi\in C^1([0,T]\times \mathbb{R}^n)$，$V-\varphi$ 在某一点 $(t,x)\in[0,T)\times \mathbb{R}^n$ 达到极大值. 固定 $u\in U$. 令 $y(\cdot)=y(\cdot\,;t,x,u)$ 是相应于控制 $u(\cdot)\equiv u$ 的状态轨线, 则由定理 2.2, 我们有 (对于充分接近 t 的 $\hat t>t$)

$$\begin{aligned}0 &\le \frac{V(t,x)-\varphi(t,x)-V(\hat t,y(\hat t))+\varphi(\hat t,y(\hat t))}{\hat t-t}\\ &\le \frac{1}{\hat t-t}\Big\{\int_t^{\hat t} f^0(s,y(s),u)\mathrm{d}s-\varphi(t,x)+\varphi(\hat t,y(\hat t))\Big\}\\ &\to f^0(t,x,u)+\varphi_t(t,x)+\langle\varphi_x(t,x),f(t,x,u)\rangle,\\ &\qquad\qquad \text{当 } \hat t\to t.\end{aligned} \tag{3.8}$$

由此

$$-\varphi_t(t,x)+H(t,x,u,-\varphi_x(t,x))\le 0,\qquad \forall\, u\in U.$$

从而

$$-\varphi_t(t,x)+\sup_{u\in U}H(t,x,u,-\varphi_x(t,x))\leq 0. \tag{3.9}$$

另一方面，如果 $V-\varphi$ 在某一点 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 达到极小值, 则由 V 的定义，可得对任何 $\varepsilon>0$、$\hat{t}>t$ ($\hat{t}>t$ 且充分接近 t), 我们可以找到 $u(\cdot)=u_{\varepsilon,\hat{t}}(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]$, 满足

$$\begin{aligned}0 &\geq V(t,x)-\varphi(t,x)-V(\hat{t},y(\hat{t}))+\varphi(\hat{t},y(\hat{t}))\\ &\geq -\varepsilon(\hat{t}-t)+\int_t^{\hat{t}}f^0(s,y(s),u(s))\mathrm{d}s\\ &\quad +\varphi(\hat{t},y(\hat{t}))-\varphi(t,x).\end{aligned}$$

两边除以 $(\hat{t}-t)$, 并令 $\hat{t}\to t$ 得到

$$\begin{aligned}-\varepsilon &\leq \frac{1}{\hat{t}-t}\Big\{-\int_t^{\hat{t}}f^0(s,y(s),u(s))\mathrm{d}s-\varphi(\hat{t},y(\hat{t}))+\varphi(t,x)\Big\}\\ &= \frac{1}{\hat{t}-t}\int_t^{\hat{t}}\Big\{-f^0(s,y(s),u(s))-\varphi_t(s,y(s)) \\ &\qquad -\langle\varphi_x(s,y(s)),f(s,y(s),u(s))\rangle\Big\}\mathrm{d}s \qquad (3.10)\\ &\leq \frac{1}{\hat{t}-t}\int_t^{\hat{t}}\Big\{-\varphi_t(s,y(s))\\ &\qquad +\sup_{u\in U}H\big(s,y(s),u,-\varphi_x(s,y(s))\big)\Big\}\mathrm{d}s\\ &\to -\varphi_t(t,x)+\sup_{u\in U}H(t,x,u,-\varphi_x(t,x)). \qquad (3.11)\end{aligned}$$

类似于 (2.11) 的证明，在上式取极限的步骤中，我们利用了 f^0 和 f 的一致连续性 (尤其是利用了由此得到的 (2.12))．结合 (3.9) 和 (3.10), 我们知 V 是 HJB 方程 (2.8) 的粘性解． □

下面我们进一步考虑粘性解的性质. 考虑以下方程:

$$\begin{cases} -v_t + \mathcal{H}(t,x,-v_x) = 0, \\ v\Big|_{t=T} = h, \end{cases} \tag{3.12}$$

其中 $\mathcal{H}:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续. 易见 (2.8) 是 (3.12) 的特例. 方程 (3.12) 的粘性解的定义方式与定义 3.1 几乎没有什么不同，请读者自行写出. 我们有以下结果.

命题 3.3. 设 $v\in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, 则 v 是 (3.12) 的经典解当且仅当 $v\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ 且 v 是 (3.12) 的粘性解.

证明. 必要性 设 v 是 (3.12) 的一个经典解, 则 $v\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. 对于任何 $\varphi\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, 如果 $v-\varphi$ 在 $(t_0,x_0)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 达到极大值，则我们有

$$\varphi_t(t_0,x_0)=v_t(t_0,x_0),\quad \varphi_x(t_0,x_0)=v_x(t_0,x_0).$$

从而

$$\begin{aligned} & -\varphi_t(t_0,x_0)+\mathcal{H}(t_0,x_0,-\varphi_x(t_0,x_0)) \\ = \;& -v_t(t_0,x_0)+\mathcal{H}(t_0,x_0,-v_x(t_0,x_0))=0. \end{aligned}$$

这表明 v 是粘性下解. 同理可证，v 也是粘性上解.

充分性 取 $\varphi=v$, 则 $v-\varphi$ 在任何点 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 既达到极大值又达到极小值. 从而由粘性解的定义，我们有

$$\begin{aligned} & -v_t(t,x)+\mathcal{H}(t,x,-v_x(t,x)) \\ = \;& -\varphi_t(t,x)+\mathcal{H}(t,x,-\varphi_x(t,x))=0. \end{aligned}$$

这就证明了结论. □

鉴于上述结论，我们可以将粘性解视为 (3.12) 的一种广义解.

§4. 粘性解的惟一性

尽管 HJB 方程 (2.8) 可能没有经典解，但是我们已经看到它确实有粘性解．事实上，值函数 $V(\cdot\,,\cdot)$ 就是 (2.8) 的一个粘性解．现在的问题是 (2.8) 的粘性解是否是惟一的．如果情况确实如此，则 HJB 方程的粘性解就刻画了最优控制问题的值函数．本节的主要目的就是对上述问题给出一个正面的回答．

定理 4.1. 设下述假设成立：

(D2)$'$ 函数 $\mathcal{H}:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 和 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续．且存在连续函数 $\bar\omega:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，关于每个变量单调不减，且对于任意 $r\geq 0$, $\bar\omega(r,0)=0$，使得

$$\left\{\begin{array}{l}|\mathcal{H}(t,x,p)-\mathcal{H}(t,x,q)|\leq L(1+|x|)|p-q|,\\ |\mathcal{H}(t,x,p)-\mathcal{H}(t,y,p)|\leq\bar\omega(|x|\vee|y|,|x-y|(1+|p|)),\\ \qquad\qquad\qquad\forall\ t\in[0,T],\,x,y,p,q\in\mathbb{R}^n,\end{array}\right.\tag{4.1}$$

则方程 (3.12) 有惟一的粘性解.

证明. 设 $v(t,x)$ 和 $\hat v(t,x)$ 是 (3.12) 的两个粘性解．为证惟一性，我们只需证明

$$v(t,x)\leq\hat v(t,x),\qquad\forall\ (t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n.\tag{4.2}$$

不妨设 $L=\frac{N}{T}$, N 是一个自然数．这样，如果我们能证明

$$v(t,x)\leq\hat v(t,x),\qquad\forall\ (t,x)\in(T-\frac{1}{L},T]\times\mathbf{R}^n,\tag{4.3}$$

则用归纳法, 我们可得 (4.2).

现在，取 $T_0\in(0,\frac{1}{L})$, 记

$$\left\{\begin{array}{l}L_0=\dfrac{L}{1-LT_0},\\ \mathscr{N}=\mathscr{N}(T_0)\equiv\Big\{(t,x)\in(T-T_0,T)\times\mathbf{R}^n\;\Big|\;|x|<L_0(t-T+T_0)\Big\}.\end{array}\right.\tag{4.4}$$

则对于 $(T-\frac{1}{L},T]\times\mathbf{R}^n$ 中的任何一点，只要 $T_0\in(0,\frac{1}{L})$ 充分接近 $\frac{1}{L}$, 它就一定包含在 $\mathscr{N}(T_0)$ 中. 于是为证明 (4.3), 我们只要证明

$$\sup_{(t,x)\in\mathscr{N}}\Big[v(t,x)-\hat{v}(t,x)\Big]\le 0.$$

若上式不成立, 则我们有

$$\sup_{(t,x)\in\mathscr{N}}\Big[v(t,x)-\hat{v}(t,x)\Big]\ge\bar{\gamma}>0. \tag{4.5}$$

由 (4.1) 及 (4.4), 对任何 $(t,x)\in\mathscr{N}$ 以及 $p,q\in\mathbf{R}^n$, 有

$$\begin{aligned}&|\mathcal{H}(t,x,p)-\mathcal{H}(t,x,q)|\\ \le\ & L(1+|x|)|p-q|\\ \le\ & L(1+L_0T_0)|p-q|=L_0|p-q|.\end{aligned} \tag{4.6}$$

现取 $\varepsilon,\delta>0$, 满足

$$\varepsilon+\delta<L_0T_0. \tag{4.7}$$

再取 $K>0$ 以及 $\zeta\in C^\infty(\mathbf{R})$ 使得

$$K>\sup_{(t,x,s,y)\in\mathscr{N}\times\mathscr{N}}\{v(t,x)-\hat{v}(s,y)\}, \tag{4.8}$$

$$\zeta(r)=\begin{cases}0, & r\le-\delta,\\ -K, & r\ge 0,\end{cases}\qquad \zeta'(r)\le 0,\quad \forall\, r\in\mathbf{R}. \tag{4.9}$$

对任何 $\alpha,\beta,\gamma>0$, 我们定义

$$\begin{aligned}&\Phi(t,x,s,y)\\ =\ & v(t,x)-\hat{v}(s,y)-\frac{1}{\alpha}|x-y|^2\\ &-\frac{1}{\beta}|t-s|^2+\zeta\Big(\langle x\rangle_\varepsilon-L_0(t-T+T_0)\Big)\\ &+\zeta\Big(\langle y\rangle_\varepsilon-L_0(s-T+T_0)\Big)+\gamma(t+s)-2\gamma T,\\ &\qquad\forall\,(t,x,s,y)\in\mathscr{N}\times\mathscr{N},\end{aligned}$$

其中 $\langle\cdot\rangle_\varepsilon$ 定义为

$$\langle z\rangle_\varepsilon=(|z|^2+\varepsilon^2)^{1/2},\qquad z\in\mathbf{R}^n.$$

由于 Φ 连续，而 $\overline{\mathscr{N}\times\mathscr{N}}$ 是紧的，我们可设 Φ 在 $\overline{\mathscr{N}\times\mathscr{N}}$ 上的最大值在点 $(t_0,x_0,s_0,y_0)\in\overline{\mathscr{N}\times\mathscr{N}}$ 达到. 于是由

$$\Phi(T,0,T,0)\le\Phi(t_0,x_0,s_0,y_0),$$

可得 (注意 (4.7)—(4.9))

$$\begin{aligned}
0 &= v(T,0)-\hat v(T,0)+2\zeta(\varepsilon-L_0T_0)\\
&\le v(t_0,x_0)-\hat v(s_0,y_0)-\frac{1}{\alpha}|x_0-y_0|^2\\
&\quad -\frac{1}{\beta}|t_0-s_0|^2+\zeta\Big(\langle x_0\rangle_{\,\varepsilon}-L_0(t_0-T+T_0)\Big) \qquad (4.10)\\
&\quad +\zeta\Big(\langle y_0\rangle_{\,\varepsilon}-L_0(s_0-T+T_0)\Big)+\gamma(t_0+s_0)-2\gamma T\\
&< K+\zeta\Big(\langle x_0\rangle_{\,\varepsilon}-L_0(t_0-T+T_0)\Big)\\
&\quad +\zeta\Big(\langle y_0\rangle_{\,\varepsilon}-L_0(s_0-T+T_0)\Big)+\gamma(t_0+s_0)-2\gamma T. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

我们断言

$$\begin{cases} |x_0|<L_0(t_0-T+T_0),\\ |y_0|<L_0(s_0-T+T_0). \end{cases} \qquad (4.12)$$

否则，如果 (4.12) 不成立，则 (注意到 $|z|<\langle z\rangle_{\,\varepsilon}$) 我们有

$$\langle x_0\rangle_{\,\varepsilon}-L_0(t_0-T+T_0)>0,$$

或

$$\langle y_0\rangle_{\,\varepsilon}-L_0(s_0-T+T_0)>0.$$

这样，由 (4.9) 以及 (4.10) 即得

$$0<K-K+\gamma(t_0+s_0)-2\gamma T\le 0.$$

这就得到了矛盾. 因此 (4.12) 成立. 另一方面，利用

$$\Phi(t_0,x_0,t_0,x_0)+\Phi(s_0,y_0,s_0,y_0)\le 2\Phi(t_0,x_0,s_0,y_0),$$

可得

$$\begin{aligned}
&v(t_0,x_0)-\hat v(t_0,x_0)+2\zeta\Big(\langle x_0\rangle_{\,\varepsilon}-L_0(t_0-T+T_0)\Big)\\
&+v(s_0,y_0)-\hat v(s_0,y_0)+2\zeta\Big(\langle y_0\rangle_{\,\varepsilon}-L_0(s_0-T+T_0)\Big)\\
&+2\gamma(t_0+s_0)-4\gamma T\\
\le\ &2v(t_0,x_0)-2\hat v(s_0,y_0)-\frac{2}{\alpha}|x_0-y_0|^2-\frac{2}{\beta}|t_0-s_0|^2\\
&2\zeta\Big(\langle x_0\rangle_{\,\varepsilon}-L_0(t_0-T+T_0)\Big)\\
&+2\zeta\Big(\langle y_0\rangle_{\,\varepsilon}-L_0(s_0-T+T_0)\Big)+2\gamma(t_0+s_0)-4\gamma T.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\alpha}|x_0-y_0|^2+\frac{2}{\beta}|t_0-s_0|^2\le v(t_0,x_0)-v(s_0,y_0)\\
&+\hat v(t_0,x_0)-\hat v(s_0,y_0)\le 2\eta(|t_0-s_0|+|x_0-y_0|), \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

其中

$$\eta(r)=\frac{1}{2}\sup_{\substack{|t-s|+|x-y|\le r\\(t,x,s,y)\in\mathscr{N}\times\mathscr{N}}}\Big\{|v(t,x)-v(s,y)|+|\hat v(t,x)-\hat v(s,y)|\Big\}.$$

易见 $\lim\limits_{r\to 0^+}\eta(r)=0$. 于是由 $\mathscr{N}$ 的有界性, 我们可得

$$\eta_0\stackrel{\triangle}{=}\sup_{r>0}\eta(r)<+\infty.$$

从而由 (4.13) 可得

$$|x_0-y_0|\le\sqrt{\alpha\eta_0},\quad |t_0-s_0|\le\sqrt{\beta\eta_0}. \tag{4.14}$$

进一步结合 (4.13) 以及 (4.14), 我们有

$$\frac{1}{\alpha}|x_0-y_0|^2+\frac{1}{\beta}|t_0-s_0|^2\le\eta(\sqrt{\alpha\eta_0}+\sqrt{\beta\eta_0}). \tag{4.15}$$

置

$$\triangle_{\varepsilon,\delta}\stackrel{\triangle}{=}\{(t,x)\in\mathscr{N}\;\big|\;\langle x\rangle_\varepsilon\le L_0(t-T+T_0)-\delta\}.$$

由 (4.5) 和 (4.9), 当 $\varepsilon,\delta,\gamma>0$ 充分小时，我们有

$$\begin{aligned}&\sup_{(t,x)\in\triangle_{\varepsilon,\delta}}\Phi(t,x,t,x)\\=&\sup_{(t,x)\in\triangle_{\varepsilon,\delta}}[v(t,x)-\hat v(t,x)+2\gamma(t-T)]\ge\frac{\bar\gamma}{2}>0.\end{aligned} \tag{4.16}$$

此外，我们还有

$$\begin{aligned}&\sup_{(t,x)\in\triangle_{\varepsilon,\delta}}\Phi(t,x,t,x)\le\sup_{\mathscr{N}\times\mathscr{N}}\Phi(t,x,s,y)\\=&\;\Phi(t_0,x_0,s_0,y_0)\le v(t_0,x_0)-\hat v(s_0,y_0).\end{aligned} \tag{4.17}$$

我们断言：存在 $r_0>0$, 使得对任何 $0<\alpha,\beta<r_0$, 成立着

$$(t_0,x_0,s_0,y_0)\in\mathscr{N}\times\mathscr{N}. \tag{4.18}$$

请读者注意这里点 (t_0,x_0,s_0,y_0) 是依赖于 $(\alpha,\beta,\varepsilon,\delta,\gamma)$ 的选择的. 现在我们来证明 (4.18). 如果 (4.18) 不成立，则按 (4.12), 一定有以下结论：对于某一列 $(\alpha_m,\beta_m)\to(0,0)$, Φ 在 $\overline{\mathscr{N}\times\mathscr{N}}$ 上的最大值点 (t_m,x_m,s_m,y_m) 满足

$$t_m=T,\qquad \text{或}\quad s_m=T,\qquad \forall\, m\ge 1.$$

由 (4.14), 我们有

$$|x_m-y_m|\to 0,\quad t_m,s_m\to T,\qquad \text{当}\, m\to\infty.$$

因此，由 (4.16)—(4.17),

$$0<\frac{\bar{\gamma}}{2}\le\lim_{m\to\infty}[v(t_m,x_m)-\hat{v}(s_m,y_m)]=0,$$

这是一个矛盾. 从而 (4.18) 成立. 有了 (4.18)，我们现在可以利用粘性解的定义来证明进一步的结果. 对于 $0<\alpha,\beta<r_0$, 由 (t_0,x_0,s_0,y_0) 的定义, 函数

$$\begin{aligned}(t,x)\quad\mapsto\quad & v(t,x)-\Big\{\hat{v}(s_0,y_0)+\frac{1}{\alpha}|x-y_0|^2\\ &+\frac{1}{\beta}|t-s_0|^2-\zeta\big(\langle x\rangle_\varepsilon-L_0(t-T+T_0)\big)\\ &-\zeta\big(\langle y_0\rangle_\varepsilon-L_0(s_0-T+T_0)\big)-\gamma(t+s_0)+2\gamma T\Big\}\end{aligned}$$

在 $(t_0,x_0)\in\mathscr{N}$ 达到极大值. 因此由粘性解的定义,

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\beta}(s_0-t_0)-\zeta'(X)L_0+\gamma\\ &+\mathcal{H}\Big(t_0,x_0,\frac{2}{\alpha}(y_0-x_0)+\zeta'(X)\frac{x_0}{\langle x_0\rangle_\varepsilon})\Big)\le 0,\end{aligned}\tag{4.19}$$

其中 $X\triangleq\langle x_0\rangle_\varepsilon-L_0(t_0-T+T_0)$. 类似地，函数

$$\begin{aligned}(s,y)\quad\mapsto\quad & \hat{v}(s,y)-\Big\{v(t_0,x_0)-\frac{1}{\alpha}|x_0-y|^2\\ &-\frac{1}{\beta}|t_0-s|^2+\zeta\big(\langle x_0\rangle_\varepsilon-L_0(t_0-T+T_0)\big)\\ &+\zeta\big(\langle y\rangle_\varepsilon-L_0(s-T+T_0)\big)+\gamma(t_0+s)-2\gamma T\Big\}\end{aligned}$$

在 $(s_0,y_0)\in\mathscr{N}$ 达到极小值. 因此由粘性解的定义我们又有

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\beta}(s_0-t_0)+\zeta'(Y)L_0-\gamma\\ &+\mathcal{H}\Big(s_0,y_0,\frac{2}{\alpha}(y_0-x_0)-\zeta'(Y)\frac{y_0}{\langle y_0\rangle_\varepsilon})\Big)\ge 0,\end{aligned}\tag{4.20}$$

其中 $Y\triangleq\langle y_0\rangle_\varepsilon-L_0(s_0-T+T_0)$. 结合 (4.19)—(4.20), 我们可得

$$\begin{aligned}2\gamma\quad\le\quad & L_0[\zeta'(X)+\zeta'(Y)]-\mathcal{H}\Big(t_0,x_0,\frac{2}{\alpha}(y_0-x_0)+\zeta'(X)\frac{x_0}{\langle x_0\rangle_\varepsilon}\Big)\\ &+\mathcal{H}\Big(s_0,y_0,\frac{2}{\alpha}(y_0-x_0)-\zeta'(Y)\frac{y_0}{\langle y_0\rangle_\varepsilon}\Big).\end{aligned}\tag{4.21}$$

选取 $\beta\downarrow 0$, 使得 (t_0,x_0,s_0,y_0) 收敛. 为了记号简洁起见，我们仍把极限记为 (t_0,x_0,s_0,y_0). 注意到由 (4.13), 我们必定有 $s_0=t_0$, 从而 (4.15) 成为

$$\frac{1}{\alpha}|x_0-y_0|^2\le\eta(\sqrt{\alpha\eta_0}).\tag{4.22}$$

这样, (利用 (4.1) 和 (4.6)) 可从 (4.21) 导出

$$\begin{aligned}
2\gamma \quad \le \quad & L_0[\zeta'(X)+\zeta'(Y)] \\
& -\mathcal{H}\Big(t_0,x_0,\frac{2}{\alpha}(y_0-x_0)+\zeta'(X)\frac{x_0}{\langle x_0\rangle_\varepsilon}\Big) \\
& +\mathcal{H}\Big(t_0,y_0,\frac{2}{\alpha}(y_0-x_0)-\zeta'(Y)\frac{y_0}{\langle y_0\rangle_\varepsilon}\Big) \\
\le \quad & L_0[\zeta'(X)+\zeta'(Y)]+L_0\Big|\zeta'(X)\frac{x_0}{\langle x_0\rangle_\varepsilon}+\zeta'(Y)\frac{y_0}{\langle y_0\rangle_\varepsilon}\Big| \\
& +\bar\omega\Big(|x_0|\vee|y_0|,|x_0-y_0|[1+\Big|\frac{2}{\alpha}(y_0-x_0)+\zeta'(X)\frac{x_0}{\langle x_0\rangle_\varepsilon}\Big|]\Big) \\
\le \quad & L_0[\zeta'(X)+\zeta'(Y)]+L_0[|\zeta'(X)|+|\zeta'(Y)|] \\
& +\bar\omega\Big(|x_0|\vee|y_0|,|x_0-y_0|(1+|\zeta'(X)|)+\frac{2}{\alpha}|x_0-y_0|^2\Big).
\end{aligned}$$

由于 $\zeta'(r)\le 0$, 我们可得

$$0<2\gamma\le\bar\omega\Big(|x_0|\vee|y_0|,|x_0-y_0|(1+|\zeta'(X)|)+\frac{2}{\alpha}|x_0-y_0|^2\Big).$$

令 $\alpha\to 0$ 并利用 (4.22), 得到矛盾. 因此 (4.2) 成立. 我们得到定理的证明. □

如果记

$$\mathcal{H}(t,x,p)=\sup_{u\in U}H(t,x,u,p),\qquad \forall\,(t,x,p)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,$$

则由 (D1) 和 (D2), 不难得到 (D2)′. 从而作为定理 3.2 和定理 4.1 的一个推论，我们有

推论 4.2. 设(D1)—(D2) 成立, 则值函数 $V(\cdot,\cdot)$ 是方程 (2.8) 惟一的粘性解.

§5. 上微分和下微分

在这一节中，我们将引入**上微分**、**下微分**的概念. 进一步，我们将利用上下微分给出粘性解的一个等价定义. 使用这一定义在某些时候会比用原来的定义更为方便.

定义 5.1. 设有函数 $v:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. 对于 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$, 记

$$
\begin{aligned}
D_{t,x}^{1,+}v(t,x) &\triangleq \Big\{(q,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\,\Big| \\
&\qquad \varlimsup_{\substack{s\to t, s\in[0,T)\\ y\to x}} \frac{v(s,y)-v(t,x)-q(s-t)-\langle p,y-x\rangle}{|s-t|+|y-x|}\le 0\Big\},\\
D_{t,x}^{1,-}v(t,x) &\triangleq \Big\{(q,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\,\Big| \\
&\qquad \varliminf_{\substack{s\to t, s\in[0,T)\\ y\to x}} \frac{v(s,y)-v(t,x)-q(s-t)-\langle p,y-x\rangle}{|s-t|+|y-x|}\ge 0\Big\}.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

$D_{t,x}^{1,+}v(t,x)$ 和 $D_{t,x}^{1,-}v(t,x)$ 分别称为 v 在 (t,x) 的**上微分**和**下微分**. 为了方便起见, 我们把 $D_{t,x}^{1,+}v(t,x)$ 和 $D_{t,x}^{1,-}v(t,x)$ 中某个具体的元分别称为**上导数** 和**下导数**. 如果在 (5.1) 的极限号中限制 s 趋于 t 的方向为 $s\downarrow t$, 我们就得到 $D_{t+,x}^{1,+}v(t,x)$ 和 $D_{t+,x}^{1,-}v(t,x)$, 分别称为 v 在 (t,x) 的**右上微分**和**右下微分**. 同样地, 我们可以定义 v 在 (t,x) 的左上微分 $D_{t-,x}^{1,+}v(t,x)$ 和左下微分 $D_{t-,x}^{1,-}v(t,x)$.

以下命题包含了上下微分的一些基本性质. 请读者自己证明这些性质.

命题 5.2. (i) 集合 $D_{t,x}^{1,\pm}v(t,x)$ 以及 $D_{t+,x}^{1,\pm}v(t,x)$ 是凸闭集, 且满足

$$
\begin{cases}
D_{t,x}^{1,+}v(t,x)\subseteq D_{t+,x}^{1,+}v(t,x),\\
D_{t,x}^{1,-}v(t,x)\subseteq D_{t+,x}^{1,-}v(t,x),\\
D_{t,x}^{1,+}(-v)(t,x)=-D_{t,x}^{1,-}v(t,x),
\end{cases}
\qquad \forall\ (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n. \tag{5.2}
$$

(ii) $v(t,x)$ 在 $(t_0,x_0)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n$ 可微当且仅当

$$
D_{t,x}^{1,+}v(t_0,x_0)\bigcap D_{t,x}^{1,-}v(t_0,x_0)\neq\phi;
$$

此时，$D^{1,+}_{t,x}v(t_0,x_0)$ 和 $D^{1,-}_{t,x}v(t_0,x_0)$ 都为单点集，且

$$D^{1,+}_{t,x}v(t_0,x_0)=D^{1,-}_{t,x}v(t_0,x_0)=\Big\{\Big(v_t(t_0,x_0),v_x(t_0,x_0)\Big)\Big\}.$$

(iii) 如果 $v(t,x)$ 在 (t_0,x_0) 是关于 (t,x) 局部 Lipschitz 连续的，则

$$D^{1,+}_{t,x}(t_0,x_0)\bigcup D^{1,-}_{t,x}(t_0,x_0)\subseteq\partial v(t_0,x_0),$$

这里，$\partial v(t_0,x_0)$ 是 Clarke 的广义梯度:

$$\partial v(t_0,x_0)\overset{\triangle}{=}\{\xi\in\mathbb{R}^{n+1}\Big|\langle\xi,y\rangle\le\varlimsup_{\substack{z\to(t_0,x_0)\\ \alpha\downarrow 0}}\frac{v(z+\alpha y)-v(z)}{\alpha},\quad\forall\, y\in\mathbb{R}^{n+1}\}.$$

现在，我们引入下面的结果．有了这一结果，我们就可以把上、下微分与粘性解的概念联系起来.

引理 5.3. 设 $v\in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. 给定 $(t_0,x_0)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$, 则

(i) $(q,p)\in D^{1,+}_{t,x}v(t_0,x_0)$ 当且仅当存在函数 $\varphi\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, 使得 $v-\varphi$ 在 (t_0,x_0) 达到严格最大值, 且

$$\Big(\varphi(t_0,x_0),\varphi_t(t_0,x_0),\varphi_x(t_0,x_0)\Big)=(v(t_0,x_0),q,p).\tag{5.3}$$

(ii) $(q,p)\in D^{1,+}_{t+,x}v(t_0,x_0)$ 当且仅当存在函数 $\varphi\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\Big(\varphi(t_0,x_0),\varphi_t(t_0,x_0),\varphi_x(t_0,x_0)\Big)=(v(t_0,x_0),q,p),\tag{5.4}$$

且对于任何 $t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}^n\setminus\{(t_0,x_0)\}$, 有

$$\varphi(t,x)>v(t,x).\tag{5.5}$$

证明. 我们只证明 (ii). (i) 的证明是类似的.

设 $(q,p)\in D^{1,+}_{t+,x}v(t_0,x_0)$. 令

$$\Phi(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\Big(v(t,x)-v(t_0,x_0)-q(t-t_0)-\langle p,x-x_0\rangle\Big)\vee 0}{t-t_0+|x-x_0|}, \\ \qquad\qquad \text{如果 } (t_0,x_0)\neq(t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}^n, \\ 0, \qquad \text{其它},\end{cases}$$

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\sup\{\Phi(t,x):(t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}^n, t-t_0+|x-x_0|\le r\}, \\ \qquad\qquad \text{如果 } r>0, \\ 0, \qquad \text{如果 } r\le 0,\end{cases}$$

则由 (5.1) 可得 $\varepsilon:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ 是连续的不减函数，$\varepsilon(0)=0$. 进一步

$$\begin{aligned}&v(t,x)-v(t_0,x_0)-q(t-t_0)-\langle p,x-x_0\rangle\\ \le\ &\Big(t-t_0+|x-x_0|\Big)\varepsilon(t-t_0+|x-x_0|),\\ &\qquad\qquad \forall\,(t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{5.6}$$

置

$$\psi(t,x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2(t-t_0+|x-x_0|)}\varepsilon(\rho)d\rho+\Big(t-t_0+|x-x_0|^2\Big)^2, \\ \qquad\qquad \text{如果 } (t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}^n, \\ 0, \qquad \text{如果 } (t,x)\in[0,t_0)\times\mathbb{R}^n,\end{cases}$$

易见，$\psi\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，且有

$$\psi(t_0,x_0)=0,\quad \psi_t(t_0,x_0)=0,\quad \psi_x(t_0,x_0)=0,$$

以及 (注意到 (5.6))

$$\psi(t,x)$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \int_{t-t_0+|x-x_0|}^{2(t-t_0+|x-x_0|)} \varepsilon(\rho)d\rho + \big(t-t_0+|x-x_0|^2\big)^2 \\
&\geq (t-t_0+|x-x_0|)\varepsilon(t-t_0+|x-x_0|) + \big(t-t_0+|x-x_0|^2\big)^2 \\
&> (t-t_0+|x-x_0|)\varepsilon(t-t_0+|x-x_0|) \\
&\geq v(t,x)-v(t_0,x_0)-q(t-t_0)-\langle p, x-x_0\rangle, \\
&\qquad\qquad \forall\ (t_0,x_0)\neq(t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}^n. \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

于是，定义

$$\varphi(t,x)=v(t_0,x_0)+q(t-t_0)+\langle p,x-x_0\rangle+\psi(t,x),\quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,$$

我们即得 (5.4). 这就证明了 (5.4)—(5.5) 是 $(q,p)\in D^{1,+}_{t+,x}v(t_0,x_0)$ 的必要条件. 余下的充分性是显然的，证明从略. □

与上述引理相应的有下面关于 $D^{1,-}_{t,x}v(t,x)$ 和 $D^{1,-}_{t+,x}v(t,x)$ 的结果.

引理 5.4. 设 $v\in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$，$(t_0,x_0)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$, 则

(i) $(q,p)\in D^{1,-}_{t,x}v(t_0,x_0)$ 当且仅当存在 $\varphi\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, 使得 $v-\varphi$ 在 (t_0,x_0) 达到严格最小值，且

$$\Big(\varphi(t_0,x_0),\varphi_t(t_0,x_0),\varphi_x(t_0,x_0)\Big)=(v(t_0,x_0),q,p).$$

(ii) $(q,p)\in D^{1,-}_{t+,x}v(t_0,x_0)$ 当且仅当存在 $\varphi\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, 使得

$$
\begin{cases}
\Big(\varphi(t_0,x_0),\varphi_t(t_0,x_0),\varphi_x(t_0,x_0)\Big)=(v(t_0,x_0),q,p), \\
\varphi(t,x)<v(t,x), \qquad \forall\ (t_0,x_0)\neq(t,x)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}^n.
\end{cases} \tag{5.8}
$$

读者不难看到在引理 5.3 和 5.4 的 (i) 中，“严格最大 (小) 值”可以用“最大 (小) 值”或“极大 (小) 值”来代替. 同样，在 (ii) 中

也可以作类似的替代. 引理 5.3 和 5.4 的几何意义如下：设 (q,p) 为 $D^{1,+}_{t,x}(t_0,x_0)$ $(D^{1,-}_{t,x}(t_0,x_0))$ 中的某一个元, 则我们可以找到一个 C^1 函数 φ，使得该函数的图象在 v 的图象上方 (下方)，两图象仅在点 (t_0,x_0) 接触，且 (φ_t,φ_x) 在 (t_0,x_0) 的值恰好是 (q,p). 利用上下导数我们可以给出粘性解的一个等价定义.

定理 5.5. 函数 $v\in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ 是方程 (2.8) 的粘性解当且仅当

$$v(T,x)=h(x),\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n,$$

以及对任何 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} -q+\sup\limits_{u\in U}H(t,x,u,-p)\le 0, & \forall\,(q,p)\in D^{1,+}_{t,x}v(t,x),\\ -q+\sup\limits_{u\in U}H(t,x,u,-p)\ge 0, & \forall\,(q,p)\in D^{1,-}_{t,x}v(t,x). \end{cases}\tag{5.9}$$

证明. 设 v 是 (2.8) 的一个粘性解, 则 $\forall\,(q,p)\in D^{1,+}_{t,x}v(t,x)$, 由引理 5.3, 存在函数 $\varphi\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ 使得 $v-\varphi$ 在 (t,x) 达到最大值, 而且在该点 (5.3) 成立. 从而由定义 3.1, (3.7) 成立. 这就给出了 (5.9) 中第一个关系式. 类似地可证 (5.9) 中第二个关系式. 现设 (5.9) 成立. 如果 $\varphi\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ 在 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ 达到极大值，则我们可以得到 $(\varphi_t(t,x),\varphi_x(t,x))\in D^{1,+}_{t,x}v(t,x)$. 因此，利用 (5.9) 中第一个关系式，我们可以得到 (3.7). 这就表明 v 是 (2.8) 的一个粘性下解. 同理可证 v 是 (2.8) 的粘性上解.

□

定理 5.5 给出了粘性解的一个等价定义. 事实上，(5.9) 中的第一式是关于粘性下解的一个等价条件，而第二式则是关于粘性上解的等价条件. 一般说来，右上微分是一个包含上微分的集合 (见 (5.2) 中第一式)，而且两者可以不相同. 因而下面的结果表明值函数 V 可以有更强的性质.

定理 5.6. 设 (D1)—(D2) 成立, 则值函数 V 是函数类 $C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ 中满足以下条件的惟一的元素: 对任何 $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} -q + \sup_{u \in U} H(t,x,u,-p) \leq 0, & \forall\ (q,p) \in D^{1,+}_{t+,x} V(t,x), \\ -q + \sup_{u \in U} H(t,x,u,-p) \geq 0, & \forall\ (q,p) \in D^{1,-}_{t+,x} V(t,x), \\ V(T,x) = h(x). \end{cases} \tag{5.10}$$

证明. 对任何 $(q,p) \in D^{1,\pm}_{t+,x} V(t,x)$, 取适合引理 5.3(ii) 或引理 5.4(ii) 的函数 φ(用 V 代替 v), 则我们可以利用与定理 3.2 中完全相同的讨论得到 (5.10)(注意在那里我们在证明 (3.8) 及 (3.10) 时只用到关于时间的右极限). 另一方面，由定理 4.1 以及定理 5.5，并注意到 $D^{1,+}_{t,x} V(t,x) \subseteq D^{1,+}_{t+,x} V(t,x)$ 以及 $D^{1,-}_{t,x} V(t,x) \subseteq D^{1,-}_{t+,x} V(t,x)$ 可知满足 (5.10) 的 $C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ 类函数的惟一性. □

由上面的定理，我们看到在条件 (D1)—(D2) 下, 条件 (5.9) 和 (5.10) 都是定义 HJB 方程 (2.9) 粘性解的条件 (该粘性解是惟一的，且恰恰就是值函数 V), 从而它们两者也一定是等价的. 事实上，在条件 (D1)—(D2) 下，(5.9) 中的两个式子是分别与 (5.10) 中的两个式子等价的. 定理 5.6 中得到的结果无疑是非常有趣的. 然而这一结果是关于 HJB 方程 (2.9) 这样一种比较特殊的方程，在条件 (D1)—(D2) 下得到的. 事实上，这样的前提是不必要的，我们可以对非常一般的方程得到同样的结论. 考虑以下方程:

$$F(t,x,v(t,x),v_t(t,x),v_x(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in (a,b) \times \Omega, \tag{5.11}$$

定义 5.7. 设 $-\infty < a < b < +\infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个区域. 对于 $v \in C((a,b) \times \Omega)$, 我们称 v 为 (5.11) 的粘性下解，如果

$$F(t,x,v(t,x),q,p) \leq 0, \quad \forall\ (t,x) \in (a,b) \times \Omega,\ (q,p) \in D^{1,+}_{t,x} v(t,x).$$

类似地, v 称为 (5.11) 的粘性上解, 如果

$$F(t,x,v(t,x),q,p) \geq 0, \quad \forall\ (t,x) \in (a,b) \times \Omega,\ (q,p) \in D^{1,-}_{t,x} v(t,x).$$

如果 v 既是粘性上解又是粘性下解, 我们就称之为粘性解.

我们建立以下引理:

引理 5.8. 设 $v \in C((a,b) \times \Omega)$,

$$F \in C((a,b) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n),$$

满足

$$F(t,x,w,q,p) - F(t,x,w,\hat{q},p) \geq \Lambda(\hat{q}-q), \tag{5.12}$$
$$\forall\ (t,x,w,p) \in (a,b) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \hat{q}, q \in \mathbb{R}, \hat{q} \geq q,$$

其中 $\Lambda > 0$ 是一个常数.

(i) 若 v 是 (5.11) 的粘性下解, $p \in D^{1,+}_x v(t,x)$, $q \in \mathbb{R}$ 满足

$$F(t,x,v(t,x),q,p) \geq 0,$$

则 $(q,p) \in D^{1,+}_{t^-,x} v(t,x)$.

这里 $D^{1,+}_x v(t,x)$ 表示 t 固定时, 函数 $v(t,\cdot)$ 在点 x 的上微分 (类似地, 下面的 $D^{1,-}_x v(t,x)$ 表示 t 固定时, 函数 $v(t,\cdot)$ 在点 x 的下微分).

(ii) 若 v 是 (5.11) 粘性上解, $p \in D^{1,-}_x v(t,x)$, $q \in \mathbb{R}$ 满足

$$F(t,x,v(t,x),q,p) \leq 0,$$

则 $(q,p) \in D^{1,-}_{t^-,x} v(t,x)$.

证明. (i) 设 v 是 (5.11) 的粘性下解. 不失一般性，我们可假设 $[-1,1]\subset(a,b)$, $B_1(0)\subset\Omega$ 以及 $\Lambda=1$, 这里 $B_1(0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位开球. 设 $p_0\in D_x^{1,+}v(0,0)$, $q_0\in\mathbb{R}$ 满足

$$F(0,0,v(0,0),q_0,p_0)\geq 0. \tag{5.13}$$

我们所要证明的就是 $(q_0,p_0)\in D_{t-,x}^{1,+}v(0,0)$. 记

$$\begin{aligned}\tilde F(t,x,q,p)=F(t,x,v(t,x),q,p),&\\ \forall\ (t,x,q,p)\in(a,b)\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,&\end{aligned}$$

则 $\tilde F\in C((a,b)\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. 记

$$\eta(r)\equiv\sup_{\substack{t^2+|x|^2+|p|^2\leq r^2\\ |t|\leq 1}}|\tilde F(t,x,q_0,p+p_0)-\tilde F(0,0,q_0,p_0)|,\quad r\geq 0,$$

则 $\eta(\cdot)$ 在 $[0,+\infty)$ 不减. 由 $\tilde F$ 的连续性,

$$\eta(r)\to 0,\quad \text{当 } r\to 0^+.$$

定义

$$\omega(r)\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_r^{2r}\{\frac{1}{\xi}\int_\xi^{2\xi}\eta(\sqrt{\theta})d\theta\}d\xi+r, & \text{如果 } 0<r<+\infty,\\ 0, & \text{如果 } r=0,\end{cases}$$

则

$$\begin{cases}\omega(0)=0,\ \omega(\cdot)\in C[0,+\infty)\cap C^1(0,+\infty),\\ 0<r\omega'(r)\leq 2\omega(2r),\qquad \forall\ 0<r<+\infty,\end{cases} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}|\tilde F(t,x,q_0,p+p_0)-\tilde F(0,0,q_0,p_0)|\leq\omega(t^2+|x|^2+|p|^2),&\\ \forall\ (t,x,p)\in[-1,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.&\end{aligned}$$

任取 $\varepsilon>0$. 由于 $p_0\in D_x^{1,+}v(0,0)$, 我们有 $\delta_\varepsilon>0$ 使

$$v(0,x)-v(0,0)-p_0\cdot x\leq\varepsilon|x|,\quad \forall\ |x|\leq\delta_\varepsilon.$$

于是由 v 的连续性，存在常数 $C_\varepsilon \geq 1$ 使得

$$v(t,x) \leq v(0,0) + p_0 \cdot x + \varepsilon\sqrt{t^2+|x|^2} + q_0 t + C_\varepsilon |x|^2, \quad (5.15)$$
$$\forall\ (t,x) \in \{t=0, |x|\leq 1\} \cup \{-1 \leq t \leq 0, |x|=1\}.$$

选取 $M_\varepsilon = \omega(18C_\varepsilon^2)/\omega(\frac{\varepsilon^2}{C_\varepsilon^2})$ 以及 $-\varepsilon \leq t_0 < t_1 < 0$ 使得

$$\omega(4t_0^2) \leq \frac{\varepsilon}{2M_\varepsilon}, \tag{5.16}$$

$$|t_1| \leq \frac{\varepsilon |t_0|}{4M_\varepsilon \omega(4)}. \tag{5.17}$$

我们断言

$$\begin{aligned} v(t,x) &\leq v(0,0) + p_0 \cdot x + \varepsilon\sqrt{t^2+|x|^2} + q_0 t \\ &\quad + C_\varepsilon |x|^2 - M_\varepsilon t \omega(t^2+|x|^2) - \omega(18\varepsilon^2) t \\ &\triangleq \varphi(t,x),\ \forall\ (t,x) \in \overline{Q}_\varepsilon, \end{aligned} \tag{5.18}$$

其中 $Q_\varepsilon \triangleq (t_1, 0) \times B_1(0)$. 否则, 我们有 $(\hat{t},\hat{x}) \in Q_\varepsilon$ 满足

$$v(\hat{t},\hat{x}) > \varphi(\hat{t},\hat{x}). \tag{5.19}$$

令

$$\psi(t,x) \triangleq (t-t_1)[v(t,x) - \varphi(t,x)], \quad (t,x) \in \overline{Q}_\varepsilon.$$

注意到在 $\overline{Q}_\varepsilon$ 上 $t \leq 0$，由 (5.15), 我们有

$$\psi(t,x)|_{\partial Q_\varepsilon} \leq 0,$$

并由 (5.19) 得

$$\psi(\hat{t},\hat{x}) > 0.$$

这样，存在 $(\tilde{t},\tilde{x}) \in Q_\varepsilon$ 使得

$$\psi(\tilde{t},\tilde{x}) = \max_{(t,x)\in Q_\varepsilon} \psi(t,x) > 0. \tag{5.20}$$

即

$$v(t,x)\leq\frac{\tilde t-t_1}{t-t_1}[v(\tilde t,\tilde x)-\varphi(\tilde t,\tilde x)]+\varphi(t,x),\quad\forall\ (t,x)\in Q_\varepsilon.$$

从而由引理 5.3(ii),

$$(-\frac{1}{\tilde t-t_1}[v(\tilde t,\tilde x)-\varphi(\tilde t,\tilde x)]+\varphi_t(\tilde t,\tilde x),\varphi_x(\tilde t,\tilde x))\in D^{1,+}_{t,x}v(\tilde t,\tilde x).$$

因此

$$\tilde F(\tilde t,\tilde x,-\frac{1}{\tilde t-t_1}[v(\tilde t,\tilde x)-\varphi(\tilde t,\tilde x)]+\varphi_t(\tilde t,\tilde x),\varphi_x(\tilde t,\tilde x))\leq 0.\qquad(5.21)$$

另一方面，由 (5.20), 我们还有

$$\frac{1}{\tilde t-t_1}[v(\tilde t,\tilde x)-\varphi(\tilde t,\tilde x)]=\frac{\psi(\tilde t,\tilde x)}{(\tilde t-t_1)^2}>0.\qquad(5.22)$$

于是由 (5.12), (5.13)—(5.15), (5.21)—(5.22), 并注意到 $\tilde t\leq 0$ 可得

$$\begin{aligned}
&M_\varepsilon\omega(\tilde t^2+|\tilde x|^2)+\omega(18\varepsilon^2)\\
\leq\;&\frac{\varepsilon(-\tilde t)}{\sqrt{\tilde t^2+|\tilde x|^2}}+M_\varepsilon\omega(\tilde t^2+|\tilde x|^2)+2M_\varepsilon\tilde t^2\omega'(\tilde t^2+|\tilde x|^2)+\omega(18\varepsilon^2)\\
=\;&q_0-\varphi_t(\tilde t,\tilde x)\\
\leq\;&q_0-\varphi_t(\tilde t,\tilde x)+\frac{1}{\tilde t-t_1}[v(\tilde t,\tilde x)-\varphi(\tilde t,\tilde x)]\\
\leq\;&\tilde F(\tilde t,\tilde x,-\frac{1}{\tilde t-t_1}[v(\tilde t,\tilde x)-\varphi(\tilde t,\tilde x)]+\varphi_t(\tilde t,\tilde x),\varphi_x(\tilde t,\tilde x))\\
&-\tilde F(\tilde t,\tilde x,q_0,\varphi_x(\tilde t,\tilde x))\\
\leq\;&-\tilde F(\tilde t,\tilde x,q_0,\varphi_x(\tilde t,\tilde x))\\
\leq\;&-\tilde F(0,0,q_0,p_0)+\omega(\tilde t^2+|\tilde x|^2+|\varphi_x(\tilde t,\tilde x)-p_0|^2)\\
\leq\;&\omega(\ t_1^2+|\tilde x|^2+[\ \varepsilon+2C_\varepsilon|\tilde x|+2M_\varepsilon|\tilde t|\ |\tilde x|\omega'(\tilde t^2+|\tilde x|^2)\ ]^2\ )\\
\leq\;&\omega(\ t_1^2+|\tilde x|^2+[\ \varepsilon+2C_\varepsilon|\tilde x|+\frac{4M_\varepsilon|\tilde t|\ |\tilde x|}{\tilde t^2+|\tilde x|^2}\omega(2\tilde t^2+2|\tilde x|^2)\ ]^2\ ).
\end{aligned}\qquad(5.23)$$

如果 $|\tilde{x}| \le |t_0|$, 则由 (5.16), 我们有

$$\frac{4M_\varepsilon|\tilde{t}|\ |\tilde{x}|}{\tilde{t}^2+|\tilde{x}|^2}\omega(2\tilde{t}^2+2|\tilde{x}|^2) \le 2M_\varepsilon\omega(4t_0^2) \le \varepsilon. \tag{5.24}$$

如果 $|\tilde{x}| > |t_0|$, 则由 (5.17), 我们有

$$\frac{4M_\varepsilon|\tilde{t}|\ |\tilde{x}|}{\tilde{t}^2+|\tilde{x}|^2}\omega(2\tilde{t}^2+2|\tilde{x}|^2) \le \frac{4M_\varepsilon|t_1|}{|t_0|}\omega(4) \le \varepsilon. \tag{5.25}$$

结合 (5.23)—(5.25), 可得

$$\begin{aligned}
& M_\varepsilon\omega(\tilde{t}^2+|\tilde{x}|^2)+\omega(18\varepsilon^2) \\
\le\ & \omega\big(t_1^2+|\tilde{x}|^2+\left(2\varepsilon^2+2C_\varepsilon|\tilde{x}|\right)^2\big) \\
\le\ & \omega(t_1^2+|\tilde{x}|^2+8\varepsilon^2+8C_\varepsilon^2|\tilde{x}|^2) \\
\le\ & \omega(9\varepsilon^2+9C_\varepsilon^2|\tilde{x}|^2).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

如果 $C_\varepsilon^2|\tilde{x}|^2 \le \varepsilon^2$, 则

$$\omega(9\varepsilon^2+9C_\varepsilon^2|\tilde{x}|^2) \le \omega(18\varepsilon^2).$$

如果 $C_\varepsilon^2|\tilde{x}|^2 > \varepsilon^2$, 则

$$\omega(9\varepsilon^2+9C_\varepsilon^2|\tilde{x}|^2) \le \omega(18C_\varepsilon^2) \le \frac{\omega(18C_\varepsilon^2)}{\omega(\varepsilon^2/C_\varepsilon^2)}\omega(|\tilde{x}|^2) = M_\varepsilon\omega(|\tilde{x}|^2).$$

这样，我们总有

$$\omega(9\varepsilon^2+9C_\varepsilon^2|\tilde{x}|^2) < \omega(18\varepsilon^2)+M_\varepsilon\omega(|\tilde{x}|^2). \tag{5.27}$$

因此由 (5.26)—(5.27) 可得

$$M_\varepsilon\omega(\tilde{t}^2+|\tilde{x}|^2)+\omega(18\varepsilon^2) < M_\varepsilon\omega(|\tilde{x}|^2)+\omega(18\varepsilon^2).$$

这是一个矛盾. 因此 (5.18) 成立. 从而我们有

$$\varlimsup_{\substack{t\to 0^-\\ x\to 0}} \frac{v(t,x)-v(0,0)-q_0t-p_0\cdot x}{|t|+|x|} \le \varepsilon+\omega(18\varepsilon^2).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 得到

$$\varlimsup_{\substack{t\to 0^- \\ x\to 0}} \frac{v(t,x)-v(0,0)-q_0 t-p_0\cdot x}{|t|+|x|} \le 0.$$

于是 $(q_0,p_0)\in D^{1,+}_{t^-,x}v(0,0)$.

(ii) 若 v 是 (5.11) 的粘性上解, 则 $u\equiv -v$ 是下述方程的粘性下解：

$$-F(t,x,-u,-u_t,-u_x)=0.$$

这样，可由 (i) 得到结论. □

下面我们给出定理 5.6 的推广：

定理 5.9. 设 $v\in C((a,b)\times\Omega)$, $F\in C((a,b)\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 满足 (5.12), 则

(i) v 是 (5.11) 的粘性下解当且仅当

$$F(t,x,v(t,x),q,p)\le 0,\quad \forall\ (t,x)\in(a,b)\times\Omega,\ (q,p)\in D^{1,+}_{t^+,x}v(t,x).$$

(ii) v 是 (5.11) 的粘性上解当且仅当

$$F(t,x,v(t,x),q,p)\ge 0,\quad \forall\ (t,x)\in(a,b)\times\Omega,\ (q,p)\in D^{1,-}_{t^+,x}v(t,x).$$

证明. (i) 若 v 是 (5.11) 的粘性下解. 设 $(q,p)\in D^{1,+}_{t^+,x}v(t,x)$, 则 $p\in D^{1,+}_x v(t,x)$. 我们断言

$$F(t,x,v(t,x),q,p)\le 0.$$

否则

$$F(t,x,v(t,x),q,p)>0.$$

于是由引理 5.8，$(q,p)\in D^{1,+}_{t^-,x}v(t,x)$. 从而, 结合假设条件 $(q,p)\in D^{1,+}_{t^+,x}v(t,x)$，我们得到 $(q,p)\in D^{1,+}_{t,x}v(t,x)$. 这与粘性下解的定义矛盾.

(ii) 结论类似可证. □

§6. 值函数的半凹性

在本节中，我们转而介绍值函数另一个有趣的性质：半凹性. 首先，我们给出如下定义：

定义 6.1. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是凸集, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$. 我们称 φ 是**弱半凹的**, 如果存在局部连续模 ω, 使得对任何 $\lambda\in[0,1]$ 以及 $x,y\in\Omega$, 成立着

$$\begin{aligned}&\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)-\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\\&\qquad\le\lambda(1-\lambda)|x-y|\omega(|x-y|,|x|\vee|y|).\end{aligned}$$

进一步, 如果有常数 $C>0$ 使得 $\omega(s,r)\le Cs,\ \forall\, s,r\ge 0$, 则我们称 φ 是 **(强)半凹的**.

显然，当 φ 是半凹时，一定有某个 $C>0$, 使得 $\psi(x)\equiv\varphi(x)-C|x|^2$ 是通常意义下的凹函数:

$$\begin{aligned}&\psi(\lambda x+(1-\lambda)y)\ge\lambda\psi(x)+(1-\lambda)\psi(y),\\&\qquad\qquad\forall\,\lambda\in[0,1],\ x,y\in\Omega.\end{aligned}$$

在实变函数中，我们知道任何 (局部有界的) 凹 (凸) 函数都是局部 Lipschitz 连续的. 下面的引理表明这一结果对更广的函数类也成立.

引理 6.2. 设 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ 是局部有界函数，满足:

$$\begin{aligned} &\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) - \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ \le\ & \lambda(1-\lambda)|x-y|\overline{C}(|x| \vee |y|), \quad \forall\, x, y \in X, \lambda \in [0,1], \end{aligned} \tag{6.1}$$

其中 $\overline{C}(\cdot)$ 是单调不减函数, 则

$$\begin{aligned} &|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \Big\{ 2 \sup_{|z| \le R+1} |\varphi(z)| + \overline{C}(R+1) \Big\} |x-y|, \\ &\qquad \forall |x|, |y| \le R, \quad R > 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

这就是说，$\varphi(\cdot)$ 是局部 Lipschitz 连续的. 特别，当 φ 是弱半凹时，它一定是局部 Lipschitz 连续的.

证明. 对于任意满足 $|x|, |y| \le R$ 的 $x, y \in X$，我们来证明 (6.2). 情形 $x = y$ 是平凡的.

下面，我们假设 $x \ne y$. 置 $\xi = \frac{x-y}{|x-y|}$, 并定义

$$\theta(t) = \varphi(y + (t-1)\xi), \qquad t \in [0, |x-y|+2].$$

显然

$$\theta(1) = \varphi(y), \qquad \theta(|x-y|+1) = \varphi(x).$$

由 (6.1)，对任何 $s, t \in [0, |x-y|+2]$ 和 $\lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} &\lambda\theta(t) + (1-\lambda)\theta(s) - \theta(\lambda t + (1-\lambda)s) \\ =\ & \lambda\varphi(y + (t-1)\xi) + (1-\lambda)\varphi(y + (s-1)\xi) \\ &\qquad -\varphi(y + [\lambda t + (1-\lambda)s - 1]\xi) \\ \le\ & \lambda(1-\lambda)|t-s|\overline{C}(R+1). \end{aligned} \tag{6.3}$$

这里，我们利用了以下估计：

$$\left\{ \begin{aligned} &|y + (t-1)\xi| \le |y| + |t-1| \le R+1, \quad t \in [0,2], \\ &|y + (t-1)\xi| = |y + \frac{t-2}{|x-y|}(x-y) + \xi| \le R+1, \\ &\qquad\qquad\qquad t \in [2, |x-y|+2]. \end{aligned} \right.$$

同样，对于 $|y+(s-1)\xi|$ 有相同的结果．对于任何 $0 \le t_1 < t_2 < t_3 \le |x-y|+2$, 我们有

$$t_2 = \frac{t_3-t_2}{t_3-t_1}t_1 + \frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}t_3.$$

这样，由 (6.3), (取 $\lambda = \frac{t_3-t_2}{t_3-t_1}$, $t=t_1$, $s=t_3$) 我们有

$$\theta(t_2) \ge \frac{t_3-t_2}{t_3-t_1}\theta(t_1) + \frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}\theta(t_3) - \frac{(t_3-t_2)(t_2-t_1)}{t_3-t_1}\overline{C}(R+1).$$

这就得到

$$\begin{aligned} \frac{\theta(t_2)-\theta(t_1)}{t_2-t_1} &\ge \frac{\theta(t_3)-\theta(t_1)}{t_3-t_1} - \frac{t_3-t_2}{t_3-t_1}\overline{C}(R+1) \\ &\ge \frac{\theta(t_3)-\theta(t_1)}{t_3-t_1} - \overline{C}(R+1), \end{aligned} \tag{6.4}$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{\theta(t_3)-\theta(t_2)}{t_3-t_2} &\le \frac{\theta(t_3)-\theta(t_1)}{t_3-t_1} + \frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}\overline{C}(R+1) \\ &\le \frac{\theta(t_3)-\theta(t_1)}{t_3-t_1} + \overline{C}(R+1). \end{aligned} \tag{6.5}$$

因此，由 (6.4), 我们有 (取 $t_1=1, t_2=|x-y|+1, t_3=|x-y|+2$)

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|} &= \frac{\theta(|x-y|+1)-\theta(1)}{|x-y|} \\ &\ge \frac{\theta(|x-y|+2)-\theta(1)}{|x-y|+1} - \overline{C}(R+1) \\ &= \frac{\varphi(x+\xi)-\varphi(y)}{|x-y|+1} - \overline{C}(R+1) \\ &\ge -|\varphi(x+\xi)-\varphi(y)| - \overline{C}(R+1) \\ &\ge -2\sup_{|z|\le R+1}|\varphi(z)| - \overline{C}(R+1). \end{aligned}$$

由 (6.5), 我们得到 (取 $t_1=0, t_2=1, t_3=|x-y|+1$)

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|} = \frac{\theta(|x-y|+1)-\theta(1)}{|x-y|}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\theta(|x-y|+1)-\theta(0)}{|x-y|+1}+\overline{C}(R+1) \\ &\leq |\varphi(x)-\varphi(y-\xi)|+\overline{C}(R+1) \\ &\leq 2\sup_{|z|\leq R+1}|\varphi(z)|+\overline{C}(R+1). \end{aligned}$$

于是 (6.2) 随即可得. □

下面的结果给出了值函数的弱半凹性.

定理 6.3. 设(D1)—(D2) 成立, $f(t,x,u)$ 是关于 x 的 C^1 函数, 满足

$$|f_x(t,x,u)-f_x(t,\bar{x},u)|\leq\omega(|x-\bar{x}|,|x|\vee|\bar{x}|), \tag{6.6}$$

其中 $\omega(\cdot,\cdot)$ 为一个局部连续模. 进一步, 设 $f^0(t,x,u)$ 以及 $h(x)$ 是关于 (t,u) 一致的 x 的弱半凹函数, 则值函数 $V(t,x)$ 是关于 $t\in[0,T]$ 一致的 x 的弱半凹函数. 进一步, 如果 (6.6) 由下式代替:

$$|f_x(t,x,u)-f_x(t,\bar{x},u)|\leq C|x-\bar{x}|, \qquad \forall\, x,\bar{x}\in X,$$

而 $f^0(t,x,u)$ 和 $h(x)$ 为关于 (t,u) 一致的 x 的半凹函数, 则 $V(t,x)$ 是关于 $t\in[0,T]$ 一致的 x 的半凹函数.

证明. 令 $x_0,x_1\in X$ 满足 $|x_0|,|x_1|\leq K$. 由 (1.7)—(1.8), 存在常数 $R=R_K$, 使得对任何 $|x|,|\bar{x}|\leq K$, $s\in[t,T]$ 和 $u(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]$,

$$|y(s;t,x,u(\cdot))|\leq R, \quad |y(s;t,x,u(\cdot))-y(s;t,\bar{x},u(\cdot))|\leq R|x-\bar{x}|.$$

现在, 对于 $\lambda\in[0,1]$, 记 $x_\lambda=\lambda x_1+(1-\lambda)x_0$, 则对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $u_\varepsilon(\cdot)\in\mathscr{U}[t,T]$, 满足

$$J(t,x_\lambda;u_\varepsilon(\cdot))<V(t,x_\lambda)+\varepsilon. \tag{6.7}$$

为方便起见，以下，我们用 $\omega(\cdot\,,\cdot)$ 表示一个局部连续模，它在不同的地方可以是不相同的 (但与 x_0, x_1 和 $\lambda\in(0,1)$ 的选取无关)．记

$$y_{t,x_\lambda}(s)=y(s;t,x_\lambda,u_\varepsilon(\cdot)).$$

由 (6.7) 和定理条件可得

$$\begin{aligned}
&\lambda V(t,x_1)+(1-\lambda)V(t,x_0)-V(t,x_\lambda)-\varepsilon\\
\le\ &\lambda J(t,x_1;u_\varepsilon(\cdot))+(1-\lambda)J(t,x_0;u_\varepsilon(\cdot))-J(t,x_\lambda;u_\varepsilon(\cdot))\\
=\ &\int_t^T[\lambda f^0(r,y_{t,x_1}(r),u_\varepsilon(r))+(1-\lambda)f^0(r,y_{t,x_0}(r),u_\varepsilon(r))\\
&\qquad\qquad -f^0(r,y_{t,x_\lambda}(r),u_\varepsilon(r))]dr\\
&+\lambda h(y_{t,x_1}(T))+(1-\lambda)h(y_{t,x_0}(T))-h(y_{t,x_\lambda}(T))\\
\le\ &\lambda(1-\lambda)\int_t^T\omega(|y_{t,x_1}(r)-y_{t,x_0}(r)|,R)dr\\
&+\lambda(1-\lambda)\omega(|y_{t,x_1}(T)-y_{t,x_0}(T)|,R)\\
&+\int_t^T|f^0(r,\lambda y_{t,x_1}(r)+(1-\lambda)y_{t,x_0}(r),u_\varepsilon(r))\\
&\qquad\qquad -f^0(r,y_{t,x_\lambda}(r),u_\varepsilon(r))|dr\\
&+|h(\lambda y_{t,x_1}(T)+(1-\lambda)y_{t,x_0}(T))-h(y_{t,x_\lambda}(T))|\\
\le\ &\lambda(1-\lambda)\omega(R|x_1-x_0|,R)\\
&+L\int_t^T|\lambda y_{t,x_1}(r)+(1-\lambda)y_{t,x_0}(r)-y_{t,x_\lambda}(r)|dr\\
&+L|\lambda y_{t,x_1}(T)+(1-\lambda)y_{t,x_0}(T)-y_{t,x_\lambda}(T)|.
\end{aligned}\tag{6.8}$$

注意到在假设 (6.6) 下, 我们有 (记 $y_\lambda=\lambda y_1+(1-\lambda)y_0$)

$$\begin{aligned}
&|\lambda f(t,y_1,u)+(1-\lambda)f(t,y_0,u)-f(t,y_\lambda,u)|\\
=\ &\Big|\lambda\int_0^1 f_x(t,y_\lambda+\sigma(1-\lambda)(y_1-y_0),u)d\sigma(1-\lambda)(y_1-y_0)\\
&+(1-\lambda)\int_0^1 f_x(t,y_\lambda+\sigma\lambda(y_0-y_1),u)d\sigma\lambda(y_0-y_1)\Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda(1-\lambda)|y_1-y_0| \Big| \int_0^1 \Big[f_x(t, y_\lambda + \sigma(1-\lambda)(y_1-y_0), u) \\
&\qquad - f_x(t, y_\lambda + \sigma\lambda(y_0-y_1), u) \Big] d\sigma \Big| \\
&\leq \lambda(1-\lambda)|y_1-y_0|\omega(\sigma|y_1-y_0|, R).
\end{aligned}
$$

这样

$$
\begin{aligned}
& |\lambda y_{t,x_1}(s) + (1-\lambda) y_{t,x_0}(s) - y_{t,x_\lambda}(s)| \\
\leq & \int_t^s |\lambda f(r, y_{t,x_1}(r), u_\varepsilon(r)) + (1-\lambda) f(r, y_{t,x_0}(r), u_\varepsilon(r)) \\
& \qquad - f(r, \lambda y_{t,x_1}(r) + (1-\lambda) y_{t,x_0}(r), u_\varepsilon(r))| dr \\
& + L \int_t^s |\lambda y_{t,x_1}(r) + (1-\lambda) y_{t,x_0}(r) - y_{t,x_\lambda}(r)| dr \\
\leq & \lambda(1-\lambda) \int_t^s |y_{t,x_1}(r) - y_{t,x_0}(r)| \omega(|y_{t,x_1}(r) - y_{t,x_0}(r)|, R) dr \\
& + L \int_t^s |\lambda y_{t,x_1}(r) + (1-\lambda) y_{t,x_0}(r) - y_{t,x_\lambda}(r)| dr \\
\leq & \lambda(1-\lambda)|x_1 - x_0| \omega(|x_1-x_0|, R) \\
& + L \int_t^s |\lambda y_{t,x_1}(r) + (1-\lambda) y_{t,x_0}(r) - y_{t,x_\lambda}(r)| dr.
\end{aligned}
$$

于是，由 Gronwall 不等式,

$$
\begin{aligned}
& |\lambda y_{t,x_1}(s) + (1-\lambda) y_{t,x_0}(s) - y_{t,x_\lambda}(s)| \\
\leq & \lambda(1-\lambda)|x_1-x_0|\omega(|x_1-x_0|, R), \qquad s \in [t, T]. \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

因此，由 (6.8) 和 (6.9), 我们得到要证的弱半凹性.

定理的其余部分类似可证. □

注记

1. 人们现在通常将动态规划方法的建立归功于 Bellman，尽管他当时的理论是不太严格的. 但这种思想首先是由他提出的.
2. 一般认为，粘性解理论的建立应该归功于 M. G. Crandall 和 P. L. Lions (见文献 [14]). 读者如果需要更详细地了解粘性解理论，除了阅读 Crandall 和 Lions 的原始文章，也可以参看雍炯敏的专著 [5] 和雍炯敏、周迅宇合写的专著 [51] 中的有关章节. 若有兴趣了解粘性解理论建立前的基础性工作, 则可以进一步参看 Evans 的文章 [17～19].
3. 一般说来，方程
$$F(t,x,v,v_t,v_x)=0$$
的粘性解未必是方程
$$-F(t,x,v,v_t,v_x)=0$$
的粘性解.
4. 对于形如 (5.11) 的方程，利用定义 5.7 和利用类似于定义 3.1 的方法来定义粘性解是等价的. 雍炯敏提出在什么样的一般条件下, 可以有类似于定理 5.6 的结果成立. 楼红卫 [32] 给出了引理 5.8 和定理 5.9，表明定理 5.6 可以推广到很一般的情形.
5. 值得注意, 在本章讨论的问题中, 状态均无约束. 对于状态有约束的情形, 问题会变得很复杂. 此时, 对不同的初始时刻和初始状态, 允许控制集合可能不一样, 从而将导致值函数的不连续性. 此类问题的讨论尚没有令人满意的结果.

习题

1. 证明命题 1.1.
2. 设计一个最优控制问题，并用验证法求解.
3. 证明粘性解定义中极大 (小) 值可以用严格最大 (小) 值代替.
4. 给出左上微分、左下微分等的定义.
5. 设 F 是定义在 $(a,b)\times\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，证明 v 是
$$F(t,x,v(t,x),v_t(t,x),v_x(t,x))=0$$

的粘性下解

(i) 当且仅当 $u=-v$ 是

$$-F(t,x,-u(t,x),-u_t(t,x),-u_x(t,x))=0$$

的粘性上解.

(ii) 当且仅当 $w(t,x)=v(-t,x)$ 是

$$F(-t,x,w(t,x),w_t(t,x),w_x(t,x))=0$$

的粘性上解.

6. 设 F 同上一题. 举例说明

$$F=0$$

的粘性解未必是

$$-F=0$$

的粘性解.

7. 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的凸区域，证明：Ω 上函数 φ 为半凹的充分必要条件是存在常数 C 使得 $\varphi(x)-C|x|^2$ 为凹函数.

8. 证明命题 5.2.

9. 试讨论 Clarke 广义梯度为单点集与函数可微性之间的关系.

10. 若 $\varphi(\cdot)$ 为 x 附近的凸函数，则

(i) $\partial\varphi(x)=\{\xi\big|\langle\xi,y\rangle\le\varphi(x+y)-\varphi(x),\quad\forall\, y\in\mathbf{R}^n,\|y\|$ 充分小$\}$.

(ii) 在凸分析中，(i) 中式子的右端称为 $\varphi(\cdot)$ 在 x 点的次微分. 次微分与本章介绍的下微分在英文中都是用 subdifferential 一词. 中文用词的不同只是一种习惯而已. 试证明如果 $v(t,x)$ 在 (t_0,x_0) 附近是关于 (t,x) 的凸函数，则

$$D^{1,-}_{t,x}v(t_0,x_0)=\partial v(t_0,x_0).$$

11. 完成定理 6.3 余下部分的证明.

第七章 线性系统的二次最优控制问题

§1. 问题的提出

线性系统的二次最优控制问题是一类很重要的、而且可以解到底的最优控制问题. 本章的目的就是介绍这一领域的有关结果. 考虑以下状态方程:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + b(t), \qquad t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $T > t_0$, $A(\cdot) \in L^\infty(t_0, T; \mathbb{R}^{n\times n})$, $B(\cdot) \in L^\infty(t_0, T; \mathbb{R}^{n\times k})$, 以及 $b(\cdot) \in L^2(t_0, T; \mathbb{R}^n)$. 性能指标为:

$$\begin{aligned} & J(u(\cdot)) = J(u(\cdot); t_0, y_0) \\ = \ & \frac{1}{2}\int_{t_0}^T \Big\{ \langle Q(t)y(t), y(t)\rangle + 2\langle S(t)y(t), u(t)\rangle \\ & +\langle R(t)u(t), u(t)\rangle \Big\}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\langle Gy(T), y(T)\rangle, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $Q(\cdot) \in L^\infty(t_0, T; \mathcal{S}^n)$, $S \in L^\infty(t_0, T; \mathbb{R}^{k\times n})$, $R \in L^\infty(t_0, T; \mathcal{S}^k)$ 以及 $G \in \mathcal{S}^n$. 这里 $\mathcal{S}^n$ 表示 $n \times n$ 阶对称阵全体. 在上面，所有系数都是与时间变量 t 有关的. 当不引起误解时，我们通常省略 t. 对于任何 $M \in \mathcal{S}^n$, 我们用 $M \geq 0$ 和 $M > 0$ 分别表示 M 是半正定和正定的, 而用 $M \geq N (N \in \mathcal{S}^n)$ 表示 $M - N \geq 0$. 进一步，对于 $M \in L^\infty(t_0, T; \mathcal{S}^n)$, 我们记

$$\begin{cases} M \geq 0 & \Longleftrightarrow \quad M(t) \geq 0, \quad \text{a.e. } t \in [t_0, T], \\ M > 0 & \Longleftrightarrow \quad M(t) > 0, \quad \text{a.e. } t \in [t_0, T], \\ M \gg 0 & \Longleftrightarrow \quad \text{存在 } \delta > 0 \text{ 使得 } M(t) \geq \delta I, \quad \text{a.e. } t \in [t_0, T]. \end{cases}$$

在考虑线性系统的二次最优控制问题时，我们总是考虑如下的允许控制集

$$\mathscr{U} \triangleq L^2(t_0, T; \mathbb{R}^k),$$

它是一个 Hilbert 空间. 我们关心的最优控制问题可叙述如下：

问题 (LQ). 寻找控制 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}$, 使得

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}} J(u(\cdot)). \tag{1.3}$$

上述问题称为**线性二次最优控制问题**(简称 **LQ 问题**). 我们暂时不对矩阵 Q, G, R 的非负性作假设. 我们引入下述定义：

定义 1.1. (i) 称问题 (LQ) 是**有限的**, 如果 (1.3) 的右端是有限的.

(ii) 称问题 (LQ) 是 (**惟一**)**可解的** 如果存在 (惟一的)$\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}$ 满足 (1.3).

§2. 初步讨论

在研究 LQ 问题时，状态方程的线性性使得我们可以利用常数变易公式将状态变量用控制变量显式地表示出来. 进一步容易看到，把状态变量的表达式代入性能指标后，LQ 问题就化为一个在 Hilbert 空间 $\mathscr{U}$ 中求无约束二次泛函最小值的问题.

由常数变易公式，对于 $u(\cdot) \in \mathscr{U}$, 方程 (1.1) 的解为

$$y(t) \equiv y(t; t_0, y_0, u(\cdot)) = \Phi(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\Big(B(s)u(s) + b(s)\Big)\mathrm{d}s,$$

其中 $\Phi(\cdot,\cdot)$ 是方程组 (1.1) 的转移矩阵, 即

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,s)=A(t)\Phi(t,s), \qquad \Phi(s,s)=I, \qquad \forall t_0\le s\le t\le T.$$

为方便起见，我们记

$$\begin{cases} (Lu(\cdot))(t)\overset{\triangle}{=}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)B(s)u(s)\mathrm{d}s, & \forall\ u(\cdot)\in\mathscr{U};t\in[t_0,T],\\ \widehat{L}u(\cdot)\overset{\triangle}{=}(Lu(\cdot))(T), \qquad \forall\ u(\cdot)\in\mathscr{U}, & \\ f(t)\overset{\triangle}{=}\Phi(t,t_0)y_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)b(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\ t\in[t_0,T]. & \end{cases}$$

这样，我们有

$$y(t)=f(t)+(Lu(\cdot))(t), \qquad \forall\ t\in[t_0,T]. \tag{2.1}$$

对任何 $h(\cdot)\in\mathcal{Y}\overset{\triangle}{=}L^2(t_0,T;\mathbb{R}^n)$ 容易得到

$$\begin{aligned} &\Big\langle h,(Lu(\cdot))\Big\rangle_{\mathcal{Y}}\equiv\int_{t_0}^{T}\langle h(t),(Lu(\cdot))(t)\rangle\mathrm{d}t\\ =&\int_{t_0}^{T}\langle h(t),\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)B(s)u(s)\mathrm{d}s\rangle\mathrm{d}t\\ =&\int_{t_0}^{T}\mathrm{d}t\int_{t_0}^{t}\langle h(t),\Phi(t,s)B(s)u(s)\rangle\mathrm{d}s\\ =&\int_{t_0}^{T}\mathrm{d}s\int_{s}^{T}\langle h(t),\Phi(t,s)B(s)u(s)\rangle\mathrm{d}t\\ =&\int_{t_0}^{T}\langle\int_{s}^{T}B(s)^\top\Phi(t,s)^\top h(t)\mathrm{d}t,u(s)\rangle\mathrm{d}s\\ \equiv&\Big\langle(L^*h(\cdot))(\cdot),u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}}. \end{aligned}$$

也就是说 $L\in\mathscr{L}(\mathscr{U},\mathcal{Y})$ 的伴随算子 $L^*\in\mathscr{L}(\mathcal{Y},\mathscr{U})$ 为

$$(L^*h(\cdot))(\cdot)=\int_{\cdot}^{T}B(\cdot)^\top\Phi(s,\cdot)^\top h(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\ h(\cdot)\in\mathcal{Y}. \tag{2.2}$$

类似地，不难得到 $\widehat{L} \in \mathscr{L}(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n)$ 的伴随算子 $\widehat{L}^* \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{U})$ 为

$$(\widehat{L}^*\eta)(\cdot) = B(\cdot)^\top \Phi(T, \cdot)^\top \eta, \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

亦即

$$\langle \eta, \widehat{L}u(\cdot)\rangle = \Big\langle B(\cdot)^\top \Phi(T, \cdot)^\top \eta, u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}}, \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

于是，通过直接的计算可得

$$\begin{aligned}
& J(u(\cdot)) \\
= \ & \frac{1}{2}\Big\{\Big\langle (L^*QL + SL + L^*S^\top + \widehat{L}^*G\widehat{L} + R)u(\cdot), u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}} \\
& + 2\Big\langle (L^*Q + S)f(\cdot) + \widehat{L}^*(Gf(T)), u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}} \\
& + \Big\langle Qf, f\Big\rangle_{\mathcal{Y}} + \langle Gf(T), Gf(T)\rangle\Big\} \\
\equiv \ & \frac{1}{2}\Big\{\Big\langle Nu(\cdot), u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}} + 2\Big\langle H(\cdot), u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}} + F\Big\},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中，很自然地，我们把 Q, R, S 看作按如下方式定义的三个算子：

$$\begin{cases}
(Qy(\cdot))(\cdot) = Q(\cdot)y(\cdot), & \forall\, y(\cdot) \in \mathcal{Y}, \\
(Sy(\cdot))(\cdot) = S(\cdot)y(\cdot), & \forall\, y(\cdot) \in \mathcal{Y}, \\
(Ru(\cdot))(\cdot) = R(\cdot)u(\cdot), & \forall\, u(\cdot) \in \mathscr{U}.
\end{cases}$$

在 (2.4) 中，$H(\cdot)$ 和 F 是与 $u(\cdot)$ 无关的. 我们看到通过把状态变量的表达式代入性能指标，原来的最优控制问题就化成为一个 Hilbert 空间 $\mathscr{U}$ 上的二次泛函的最小值问题. 此时，得到下面的结果就是一件非常自然的事.

定理 2.1. (i) 如果问题 (LQ) 是有限的，则

$$N \geq 0. \tag{2.5}$$

(ii) 问题 (LQ) 是 (惟一) 可解的当且仅当 $N \geq 0$, 且存在 (惟一的) $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}$ 满足

$$N\bar{u}(\cdot) + H(\cdot) = 0. \tag{2.6}$$

此时, $\bar{u}(\cdot)$ 是最优控制.

(iii) 如果 $N \gg 0$ (即 N^{-1} 存在且 $N^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{U})$), 则问题 (LQ) 存在惟一的最优控制 $\bar{u}(\cdot)$, 且由下式给出:

$$\bar{u}(\cdot) = -N^{-1}H(\cdot). \tag{2.7}$$

(iv) 如果对于任何 $y_0 \in \mathbb{R}^n$, 问题 (LQ) 都是惟一可解的, 则相应于 $b(\cdot) = 0$, 问题 (LQ) 也是惟一可解的.

证明. (i) 由假设，存在常数 $C > 0$ 使得

$$J(u(\cdot)) \geq -C, \qquad \forall\, u(\cdot) \in \mathscr{U}.$$

特别

$$\frac{J(\ell u(\cdot))}{\ell^2} \geq -\frac{C}{\ell^2}, \qquad \forall\, u(\cdot) \in \mathscr{U}; \ell \neq 0.$$

于是由 (2.4) 式，

$$\Big\langle Nu(\cdot), u(\cdot) \Big\rangle_{\mathscr{U}} = \lim_{\ell\to\infty} \frac{J(\ell u(\cdot))}{\ell^2} \geq 0.$$

这就证明了 (2.5).

(ii) 首先，设 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}$ 是问题 (LQ) 的一个最优控制, 则 (注意到 $N^* = N$) 对任何 $u(\cdot) \in \mathscr{U}$, 我们有

$$0 \leq \varliminf_{\lambda\to 0} \frac{J(\bar{u}(\cdot) + \lambda u(\cdot)) - J(\bar{u}(\cdot))}{\lambda} = \Big\langle N\bar{u}(\cdot) + H(\cdot), u(\cdot) \Big\rangle_{\mathscr{U}}.$$

由于 $\mathscr{U}$ 是线性空间，从而一定有

$$\Big\langle N\bar{u}(\cdot) + H(\cdot), u(\cdot) \Big\rangle_{\mathscr{U}} = 0, \qquad \forall\, u(\cdot) \in \mathscr{U}.$$

因此，(2.6) 成立. 反过来，如果 $\bar u(\cdot)\in\mathscr{U}$ 满足 (2.6)，则由 $N\geq 0$ 及 (2.4) 可得

$$\begin{aligned}
& J(u(\cdot))-J(\bar u(\cdot))\\
= \;& J(\bar u(\cdot)+u(\cdot)-\bar u(\cdot))-J(\bar u(\cdot))\\
= \;& \Big\langle N\bar u(\cdot)+H(\cdot),u(\cdot)-\bar u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}}\\
& +\frac12\Big\langle N(u(\cdot)-\bar u(\cdot)),u(\cdot)-\bar u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}}\\
= \;& \frac12\Big\langle N(u(\cdot)-\bar u(\cdot)),u(\cdot)-\bar u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}}\geq 0,\qquad \forall\, u(\cdot)\in\mathscr{U}.
\end{aligned}$$

从而 $\bar u(\cdot)$ 是最优的.

(iii) 结合 (ii) 以及 $N\gg 0$, 如果 $\bar u(\cdot)\in\mathscr{U}$ 是最优控制，则 (2.6) 成立. 从而 (2.7) 立即可得. 反过来，如果 $\bar u(\cdot)\in\mathscr{U}$ 由 (2.7) 定义，则同样由 (ii) 可知它一定是问题 (LQ) 的最优控制.

(iv) 设对某个 $b(\cdot)$，问题 (LQ) 对任何初值 y_0 都是惟一可解的. 为叙述方便，将 (2.4) 中 $H(\cdot)$ 详记为 $H(\cdot;y_0,b(\cdot))$, 则由假设, 存在 $\bar u(\cdot),\bar u_0(\cdot)\in\mathscr{U}$ 分别是问题 (LQ) 相应于初值 y_0 和 0 的最优控制. 由 (i) 和 (ii)，它们是下述方程的惟一解.

$$\begin{aligned}
&N\bar u(\cdot)+H(\cdot;y_0,b(\cdot))=0,\\
&N\bar u_0(\cdot)+H(\cdot;0,b(\cdot))=0.
\end{aligned}\tag{2.8}$$

两式相减即得

$$N(\bar u(\cdot)-\bar u_0(\cdot))+H(\cdot;y_0,0)=0.\tag{2.9}$$

这就表明当 $b(\cdot)=0$ 时，问题 (LQ) 对任何初值 y_0 也都是可解的. 另外，易由 (2.8) 解的惟一性得到 (2.9) 解的惟一性, 从而可证最优控制的惟一性. □

如果

$$R\gg 0,\quad Q-S^\top R^{-1}S\geq 0,\quad G\geq 0,\tag{2.10}$$

则性能指标可以重写为

$$
\begin{aligned}
J(u(\cdot)) \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\Big\{\Big\langle (Q-S^\top R^{-1}S)y(t),y(t)\Big\rangle \\
&\quad +\Big|R^{\frac{1}{2}}\Big[u(t)+R^{-1}Sy(t)\Big]\Big|^2\Big\}\mathrm{d}t \\
&\quad +\frac{1}{2}\langle Gy(T),y(T)\rangle. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

从而可以证明 $N \gg 0$ 成立. 当 (2.10) 成立时，问题 (LQ) 称为是**标准的 LQ 问题**. 因此，由定理 2.1(iii), 标准的 LQ 问题是惟一可解的. 由于 N^{-1} 是一个抽象的形式，不是很容易计算，因而利用 (2.7) 计算最优控制在实际应用中是非常不方便的. 为此，我们来做进一步的分析.

定理 2.2. 设问题(LQ) 有一组最优对 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$, 则

$$
R(t)\geq 0, \qquad \text{a.e. } t\in[t_0,T], \qquad (2.12)
$$

且存在下述方程的解 $\bar{p}(\cdot)$:

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{p}}(t)+A^\top(t)\bar{p}(t)+Q(t)\bar{y}(t)+S(t)^\top\bar{u}(t)=0,\\
\bar{p}(T)=G\bar{y}(T),
\end{cases} \qquad (2.13)
$$

满足

$$
R(t)\bar{u}(t)+B(t)^\top\bar{p}(t)+S(t)\bar{y}(t)=0, \qquad \text{a.e. } t\in[t_0,T]. \qquad (2.14)
$$

证明. 设 $(\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ 是问题 (LQ) 的一组最优对, 则由定理 2.1, (2.5)—(2.6) 成立. 利用 (2.1)—(2.4) 展开 (2.6) 得到:

$$
\begin{aligned}
0 \quad &= \quad (N\bar{u}(\cdot))(t)+H(t) \\
&= \quad ((L^*QL+SL+L^*S^\top+\widehat{L}^*G\widehat{L}+R)\bar{u}(\cdot))(t) \\
&\quad +((L^*Q+S)f(\cdot))(t)+(\widehat{L}^*(Gf(T)))(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (L^*Q\bar{y}(\cdot))(t) + S(t)\bar{y}(t) + (L^*S^\top\bar{u}(\cdot))(t) \\
&\quad +(\widehat{L}^*G\bar{y}(T))(t) + R(t)\bar{u}(t) \\
&= \int_t^T B(t)^\top\Phi(s,t)^\top\Big(Q(s)\bar{y}(s) + S(s)^\top\bar{u}(s)\Big)\mathrm{d}s \\
&\quad +B(t)^\top\Phi(T,t)^\top G\bar{y}(T) \\
&\quad +S(t)\bar{y}(t) + R(t)\bar{u}(t), \quad \text{a.e. } t\in[t_0,T]. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

记

$$
\bar{p}(t) = \int_t^T \Phi(s,t)^\top\Big(Q(s)\bar{y}(s) + S(s)^\top\bar{u}(s)\Big)\mathrm{d}s + \Phi(T,t)^\top G\bar{y}(T),
$$

则

$$
B(t)^\top\bar{p}(t) + S(t)\bar{y}(t) + R(t)\bar{u}(t) = 0, \qquad \text{a.e. } t\in[t_0,T].
$$

即 (2.14) 成立. 同时可见 $\bar{p}(\cdot)$ 满足方程 (2.13). 最后, 由 (2.5) 可得 (2.12). 请读者自己证明这一结论 (参见习题 1). □

由于 (2.5) 蕴涵 (2.12), 因而 (2.12) 不仅是问题 (LQ) 可解的必要条件, 也是问题 (LQ) 有限的必要条件.

命题 2.3. 设问题(LQ) 有限, 则 (2.12) 成立.

鉴于上述结论, 在考虑 LQ 问题时, 今后我们总是假定 $R\geq 0$. 下面的例子表明 (2.12) 不是问题 (LQ) 可解的充分条件, 而且 LQ 问题的有限性要严格弱于可解性.

例 2.1. 考虑以下的一维控制系统:

$$
\begin{cases}
\dot{y}(t) = u(t), \qquad t\in[0,T], \\
y(0) = y_0 \in \mathbb{R},
\end{cases}
$$

以及性能指标

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^T y(t)^2 \mathrm{d}t.$$

此时，与 (1.1)—(1.2) 比较，可见 $R = 0$. 取 $\varepsilon \in (0, T)$ 以及

$$u_\varepsilon(t) = -\frac{y_0}{\varepsilon}\chi_{[0,\varepsilon]}(t), \qquad \forall\ t \in [0, T],$$

则有

$$0 \le J(u_\varepsilon(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^\varepsilon y_0^2\Big(1 - \frac{t}{\varepsilon}\Big)^2 \mathrm{d}t = \frac{y_0^2\varepsilon}{6} \to 0, \qquad \text{当 } \varepsilon \to 0^+.$$

这样

$$\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}} J(u(\cdot)) = 0.$$

从而相应的 LQ 问题是有限的. 另一方面，如果 $y_0 \neq 0$, 则可以证明相应的 LQ 问题不是可解的. 这是因为此时对任何 $u(\cdot) \in \mathscr{U}$, 均有

$$y(\cdot; y_0; u(\cdot)) \neq 0.$$

从而（注意 $y(\cdot; y_0; u(\cdot))$ 连续）

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^T y(t)^2 \mathrm{d}t > 0, \qquad \forall\ u(\cdot) \in \mathscr{U}.$$

读者可以容易地举出 (2.12) 成立但是问题 (LQ) 不是有限的例子. 今后，如果 $R(t) \ge 0$ 是退化的 (即在 $[t_0, T]$ 上 $R \gg 0$ 不成立)，则我们称问题 (LQ) 是**奇异的**(LQ 问题). 因此，上例中的 LQ 问题是奇异的 LQ 问题. 尽管有例子表明奇异的 LQ 问题仍有可能是可解的. 但是以下，在进一步的讨论中，我们将假设

$$R \gg 0. \tag{2.16}$$

此时，我们可以将定理 2.2 重写，把问题 (LQ) 与一个线性 Hamilton 系统的两点边值问题联系起来.

定理 2.4. (i) 设 $N \geq 0$, 且 (2.16) 成立, 则问题 (LQ) 是(惟一)可解的当且仅当下述两点边值问题有(惟一)解 $(\bar{y}(\cdot), \bar{p}(\cdot)) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$:

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}(t) = (A - BR^{-1}S)\bar{y}(t) - BR^{-1}B^{\top}\bar{p}(t) + b(t), & t \in [t_0, T], \\ \dot{\bar{p}}(t) = -(A - BR^{-1}S)^{\top}\bar{p}(t) - (Q - S^{\top}R^{-1}S)\bar{y}(t), & t \in [t_0, T], \\ \bar{y}(0) = y_0, \qquad \bar{p}(T) = G\bar{y}(T). \end{cases} \tag{2.17}$$

此时,

$$\bar{u}(t) = -R^{-1}[B^{\top}\bar{p}(t) + S\bar{y}(t)], \qquad t \in [t_0, T], \tag{2.18}$$

是一个最优控制, 而 $\bar{y}(\cdot)$ 为相应的最优轨线.

(ii) 设 $N \gg 0$, 且 (2.16) 成立, 则 (2.17) 有惟一解, 而且问题 (LQ) 惟一可解, 而由式 (2.18) 给出的 $\bar{u}(\cdot)$ 是问题 (LQ) 的一个最优控制.

证明. (i) 首先，设问题 (LQ) 是 (惟一) 可解，$(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 为一最优对，则由定理 2.2 得到 (2.13)—(2.14). 由于 (2.16) 成立, 我们可从 (2.14) 解出 $\bar{u}(\cdot)$ 得到 (2.18). 将它代入状态方程和 (2.13) 即得 (2.17). 反过来，如果 (2.17) 有解 $(\bar{y}(\cdot), \bar{p}(\cdot))$, 则用 (2.18) 定义 $\bar{u}(\cdot)$, 代入 (2.17) 即得 (2.13)，且 $\bar{y}(\cdot)$ 为相应于 $\bar{u}(\cdot)$ 的状态轨线. 由 (2.13) 得

$$\bar{p}(t) = \int_t^T \Phi(s,t)^{\top}\Big(Q(s)\bar{y}(s) + S(s)^{\top}\bar{u}(s)\Big)\mathrm{d}s + \Phi(T,t)^{\top}G\bar{y}(T).$$

注意到 (2.18) 即为 (2.14)，把 (2.15) 的推导反过来即得

$$N\bar{u}(\cdot) + H(\cdot) = 0.$$

从而由定理 2.1(ii) 知 $\bar{u}(\cdot)$ 是问题 (LQ) 的一个最优控制. 最后，惟一性部分的证明是简单的. 在此省略.

(ii) 读者不难结合 (i) 和定理 2.1(iii) 得到结论. □

上述定理表明如果 $N \geq 0$，$R \gg 0$, 则 Hamilton 系统 (2.17) 及 (2.18) 完全刻画了 LQ 问题的最优解. 特别对于一个标准的 LQ 问题，(2.18) 给出了它的惟一的最优控制. 定理 2.4 中的函数 $\bar{p}(\cdot)$ 是连接最优控制和相应的最优轨线的一个辅助函数. 这种联系是间接的. 下一步的工作就是要去除这个辅助函数，建立最优控制与最优状态轨线之间的直接联系. 为此，将引出著名的 Riccati 方程.

§3. Riccati 方程和反馈最优控制

首先我们来形式地导出 Riccati 方程. 在 (2.17) 中，函数 $\bar{p}(\cdot)$ 和 $\bar{y}(\cdot)$ 的方程是耦合在一起的，我们试用满足

$$\bar{p}(t) = P(t)\bar{y}(t) + \varphi(t), \qquad t \in [t_0, T], \tag{3.1}$$

的函数 $P(\cdot)$ 和 $\varphi(\cdot)$ 来简化方程组的表达式. 如果这样的函数可以找到, 则最优控制就具有如下的**状态反馈**形式：

$$\bar{u}(t) = -R^{-1}[(B^\top P(t) + S)\bar{y}(t) + B^\top \varphi(t)], \qquad t \in [t_0, T]. \tag{3.2}$$

这样的形式在应用中是非常有用的. 对 (3.1) 两边求导，并利用 (2.17)—(2.18) 可得

$$\begin{aligned} & -(Q - S^\top R^{-1} S)\bar{y} - (A^\top - S^\top R^{-1} B^\top)[P\bar{y} + \varphi] = \dot{\bar{p}} \\ = \;& \dot{P}\bar{y} + P[A\bar{y} + B\bar{u} + b] + \dot{\varphi} \\ = \;& \dot{P}\bar{y} + P\Big\{A\bar{y} - BR^{-1}\Big[(B^\top P + S)\bar{y} + B^\top \varphi\Big] + b\Big\} + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

从而

$$0 \;=\; \Big[\dot{P} + P(A - BR^{-1}S) + (A - BR^{-1}S)^\top P$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -PBR^{-1}B^\top P+Q-S^\top R^{-1}S\Big]\bar y\\
&\quad +\dot\varphi+\Big[A^\top-S^\top R^{-1}B^\top-PBR^{-1}B^\top\Big]\varphi+Pb\\
=&\quad \Big\{\dot P+PA+A^\top P-(PB+S^\top)R^{-1}(B^\top P+S)+Q\Big\}\bar y\\
&\quad +\dot\varphi+[(A-BR^{-1}S)^\top-PBR^{-1}B^\top]\varphi+Pb.
\end{aligned}
$$

这样，如果下述方程分别有解 $P(\cdot)$ 和 $\varphi(\cdot)$:

$$
\begin{cases}
\dot P(t)+P(t)A+A^\top P(t)+Q\\
\qquad -[B^\top P(t)+S]^\top R^{-1}[B^\top P(t)+S]=0, \quad \text{a.e. } t\in[t_0,T],\\
P(T)=G,
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{cases}
\dot\varphi(t)+\Big[(A-BR^{-1}S)^\top-P(t)BR^{-1}B^\top\Big]\varphi(t)\\
\qquad\qquad +P(t)b(t)=0, \qquad \text{a.e. } t\in[t_0,T],\\
\varphi(T)=0,
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

则 (3.1) 成立，而且我们可以取到反馈最优控制 (3.2). 方程 (3.3) 称为问题 (LQ) 的 **Riccati 方程**. 这是一个非线性常微分方程. 当 (2.16) 成立时，在 (3.3) 第一式的左端，去除 $\dot P$ 后的函数关于变量 P 是局部 Lipschitz 的，因而该方程一定是局部可解的. 即一定有某个 $s<T$, 使得 (3.3) 在 $[s,T]$ 上有 (惟一) 解. 而且由惟一性易见在解的存在区域内，P 一定是对称的. 但是，一般说来，除非有更多的条件，该方程在整个 $[t_0,T]$ 解的存在性是不能保证的. 这里，我们请读者注意

$$R\gg 0,$$

与 $R>0$ 即

$$R(t)\gg 0, \qquad \forall\, t\in[t_0,T], \tag{3.5}$$

之间的区别 (见 §1). 与前者不同, 后者不能保证 (3.3) 解的惟一性.

基于上述分析，我们进一步给出如下定理：

定理 3.1. 设 $R \gg 0$, 且方程 (3.3) 在整个 $[t_0,T]$ 上有解 $P(\cdot) \in C([t_0,T];\mathcal{S}^n)$, 则问题 (LQ)惟一可解，并且具有最优反馈控制 (3.2), 其中 $\varphi(\cdot)$ 由 (3.4) 确定. 进一步，我们有

$$\begin{aligned} &J(\bar u(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}} J(u(\cdot)) \\ =\ & \frac{1}{2}\langle P(t_0)y_0, y_0\rangle + \langle \varphi(t_0), y_0\rangle \\ &+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T \Big[2\langle \varphi(t), b(t)\rangle - \Big|R^{-\frac{1}{2}}B^\top \varphi(t)\Big|^2\Big]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.6}$$

证明. 由于 $R \gg 0$, (3.4) 在 $[t_0,T]$ 上有惟一解 $\varphi(\cdot)$. 设 $\bar y(\cdot)$ 为以下系统的解:

$$\begin{cases} \dot{\bar y}(t) = \Big\{A - BR^{-1}\Big[B^\top P(t) + S\Big]\Big\}\bar y(t) \\ \qquad -BR^{-1}B^\top \varphi(t) + b(t), \qquad t \in [t_0,T], \\ \bar y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

并设 $\bar u(\cdot)$ 由 (3.2) 给出，则 $\bar y(\cdot)$ 为相应于 $\bar u(\cdot)$ 的轨线. 现在，任取 $u(\cdot) \in \mathscr{U}$, 并记 $y(\cdot) = y(\cdot\,; t_0, y_0, u(\cdot))$ 为相应的状态轨线. 我们有

$$\begin{aligned} &\langle P(T)y(T), y(T)\rangle - \langle P(t_0)y_0, y_0\rangle \\ =\ & \int_{t_0}^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P(t)y(t), y(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\ =\ & \int_{t_0}^T \Big\{\Big\langle [(P(t)B + S^\top)R^{-1}(B^\top P(t) + S) - Q]y(t), y(t)\Big\rangle \\ &+2\langle B^\top P(t)y(t), u(t)\rangle + 2\langle P(t)b(t), y(t)\rangle\Big\}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &-\langle \varphi(t_0), y_0\rangle = \langle \varphi(T), y(T)\rangle - \langle \varphi(t_0), y_0\rangle \\ =\ & \int_{t_0}^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \varphi(t), y(t)\rangle\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= &\int_{t_0}^{T}\Big\{\Big\langle [P(t)B+S^\top)R^{-1}B^\top\varphi(t)-P(t)b(t),y(t)\Big\rangle\\
&+\langle\varphi(t),Bu(t)+b(t)\rangle\Big\}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&J(u(\cdot))-\frac{1}{2}\langle P(t_0)y_0,y_0\rangle-\langle\varphi(t_0),y_0\rangle\\
= &\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\Big\{\langle Ru,u\rangle+\langle (PB+S^\top)R^{-1}(B^\top P+S)y,y\rangle\\
&+2\langle (B^\top P+S)y,u\rangle+2\langle R^{-1}(B^\top P+S)y,B^\top\varphi\rangle\\
&+2\langle B^\top\varphi,u\rangle+2\langle\varphi,b\rangle\Big\}\mathrm{d}t\\
= &\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\Big\{\Big|R^{-\frac{1}{2}}\Big[Ru+(B^\top P+S)y+B^\top\varphi\Big]\Big|^2\\
&-\Big|R^{-\frac{1}{2}}B^\top\varphi\Big|^2+2\langle\varphi,b\rangle\Big\}\mathrm{d}t. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
J(\bar u(\cdot)) = &\frac{1}{2}\langle P(t_0)y_0,y_0\rangle+\langle\varphi(t_0),y_0\rangle\\
&+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\Big[2\langle\varphi(t),b(t)\rangle-\Big|R^{-\frac{1}{2}}B^\top\varphi(t)\Big|^2\Big]\mathrm{d}t\\
\le &\ J(u(\cdot)).
\end{aligned}
$$

由此立即可以得到 $\bar u(\cdot)$ 是惟一的最优控制，同时也得到 (3.6)． □

上述证明的关键是利用配方法得到 (3.7) 式．在定理 3.1 中，我们看到如果 Riccati 方程 (3.3) 整体有解，则问题 (LQ) 一定有惟一解．而且最优控制与最优轨线之间的关系完全由 (3.2) 给出．注意到 $P(\cdot)$ 和 $\varphi(\cdot)$ 都只是依赖于问题 (LQ) 状态方程和性能指标中的矩阵 A,B,b,Q,S,P,G 以及终点时刻 T，而与初值 (t_0,y_0) 是无关的．因而由 (3.2) 给出的最优控制是仅仅与当前的状态有关的

反馈控制. 这里，我们再一次利用研究开环问题得到了闭环问题的解. 如果定理中的 $R \gg 0$ 用 (3.5) 代替，则形式上配方法仍可进行. 但是此时不能保证 (3.4) 有解 $\varphi(\cdot)$, 即便 (3.4) 有解 $\varphi(\cdot)$, 也不能保证由 (3.2) 给出的函数是落在 $\mathscr{U}$ 中的. 以下结果进一步给出了 Riccati 方程解的整体存在性和问题 (LQ) 的可解性之间的等价关系.

定理 3.2. 设 $R \gg 0$, 则问题(LQ)对任何初值 y_0 都惟一可解当且仅当 Riccati 方程 (3.3) 的解在 $[t_0, T]$ 上存在.

证明. 充分性：在假设 $R \gg 0$ 下, 如果 Riccati 方程 (3.3) 的解在 $[t_0, T]$ 上存在，则由定理 3.1 得问题 (LQ) 存在惟一解.

必要性：如果问题 (LQ) 对任何初值 y_0 都存在惟一解，则由定理 2.1(iv), 对任何 $y_0 \in \mathbb{R}^n$, 当 $b(\cdot) = 0$ 时，问题 (LQ) 仍然是惟一可解的, 从而我们可以设

$$b(\cdot) = 0. \tag{3.8}$$

由定理 2.1(i), $N \geq 0$, 于是由定理 2.4(i), 下述方程组存在惟一解 $(\bar{y}(\cdot), \bar{p}(\cdot)) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$:

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}} = (A - BR^{-1}S)\bar{y} - BR^{-1}B^\top \bar{p}, & t \in [t_0, T], \\ \dot{\bar{p}} = -(A - BR^{-1}S)^\top \bar{p} - (Q - S^\top R^{-1}S)\bar{y}, & t \in [t_0, T], \\ \bar{y}(t_0) = y_0, \qquad \bar{p}(T) = G\bar{y}(T). \end{cases} \tag{3.9}$$

由惟一性可知 $(\bar{y}(\cdot), \bar{p}(\cdot))$ 关于 y_0 是线性的. 从而有 $X(\cdot)$ 和 $Y(\cdot)$ 满足

$$\begin{cases} \bar{y}(t) \equiv \bar{y}(t; y_0) = X(t)y_0, \\ \bar{p}(t) \equiv \bar{p}(t; y_0) = Y(t)y_0, \end{cases} \qquad t \in [t_0, T].$$

易见 $X(\cdot)$ 和 $Y(\cdot)$ 是绝对连续的，且满足以下方程组

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \widehat{A}X(t) - BR^{-1}B^\top Y(t), \qquad t \in [t_0, T], \\ \dot{Y}(t) = -\widehat{Q}X(t) - \widehat{A}^\top Y(t), \qquad t \in [t_0, T], \\ X(t_0) = I, \qquad Y(T) = GX(T), \end{cases} \tag{3.10}$$

其中

$$\begin{cases} \widehat{A} = A - BR^{-1}S, \\ \widehat{Q} = Q - S^\top R^{-1}S. \end{cases}$$

我们断言

$$\det X(t) \neq 0, \qquad t \in [t_0, T]. \tag{3.11}$$

否则，存在 $t_1 \in [t_0, T]$ 以及 $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \neq 0$ 使得

$$\bar{y}(t_1) \equiv X(t_1)y_0 = 0.$$

此时，我们先来证明 $\bar{y}(T) = 0$. 不妨设 $t_1 < T$. 注意到 $\bar{y}(\cdot)$ 是最优轨线，相应的最优控制为 $\bar{u}(\cdot) = -R^{-1}[B^\top \bar{p}(\cdot) + S\bar{y}(\cdot)]$ (参见 2.18)，则由

$$\begin{aligned} & J(u(\cdot); t_0, y_0) \\ = \; & \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \langle Q(t)y(t), y(t)\rangle + 2\langle S(t)y(t), u(t)\rangle \\ & + \langle R(t)u(t), u(t)\rangle \Big\} \mathrm{d}t + \frac{1}{2} J(u|_{[t_1,T]}(\cdot); t_1, y(t_1)), \end{aligned}$$

知 $(\bar{y}|_{[t_1,T]}(\cdot), \bar{u}|_{[t_1,T]}(\cdot))$ 也是问题 (LQ) 在初值为 $(t_1, \bar{y}(t_1))$ 时的惟一的最优对 (参见动态规划的最优性原理). 另一方面，由 (3.8), 以及 $\bar{y}(t_1) = 0$ 知相应的 $f(\cdot)$ 为 0, 从而 (2.4) 中的 $H(\cdot), F$ 也为 0. 于是，由 (2.4)

$$J(u(\cdot); t_1, \bar{y}(t_1)) = \Big\langle N_1 u(\cdot), u(\cdot) \Big\rangle_{L^2(t_1,T;\mathbb{R}^k)},$$

其中 N_1 为 (2.4) 中由 t_1 代替 t_0 得到的算子 N. 由定理 2.1 (i),

$$N_1 \geq 0.$$

从而由最优控制的惟一性得到

$$\bar{u}(t)=0, \qquad \text{a.e. } t \in [t_1, T].$$

于是又由 (3.8) 及状态方程可得

$$\bar{y}(t)=0, \qquad t \in [t_1, T].$$

特别 $\bar{p}(T)=G\bar{y}(T)=0$. 于是由 (3.9) 及解的惟一性，$\bar{y}(t)$ 和 $\bar{p}(t)$ 必然在 $[t_0,T]$ 上恒为 0, 这与假设 $y_0 \neq 0$ 矛盾, 从而 (3.11) 成立.

现在令

$$P(t) \stackrel{\triangle}{=} Y(t)X(t)^{-1}, \qquad t \in [t_0, T]. \tag{3.12}$$

我们将证明 $P(\cdot)$ 是 Riccati 方程 (3.3) 的解. 首先，$P(t)$ 是对称的. 事实上，由 (3.10), 直接计算可得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[X^\top Y - Y^\top X\Big] = 0, \qquad t \in [t_0, T], \\ \\ \Big[X^\top Y - Y^\top X\Big]\Big|_{t=T} = 0. \end{cases}$$

因此，$X^\top Y - Y^\top X \equiv 0$. 从而

$$P = YX^{-1} = (X^\top)^{-1}Y^\top = (YX^{-1})^\top = P^\top,$$

即 $P(t)$ 是对称的. 另一方面，直接计算得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^{-1} = -X^{-1}\widehat{A} - X^{-1}BR^{-1}B^\top YX^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}X^{-1} + Y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^{-1} \\ &= -[\widehat{Q}X + \widehat{A}^\top Y]X^{-1} - Y\Big[X^{-1}\widehat{A} + X^{-1}BR^{-1}B^\top YX^{-1}\Big] \\ &= -\widehat{Q} - \widehat{A}^\top P - P\widehat{A} + PBR^{-1}B^\top P, \end{aligned}$$

结合 $P(T)=G$ 即知 $P(\cdot)$ 是 (3.3) 的解. □

推论 3.3. 对于标准的LQ问题 (即式 (2.10) 成立), Riccati 方程 (3.3) 在 $[t_0,T]$ 上有解 $P(\cdot)$. 此时, 问题(LQ) 惟一的最优控制 $\bar u(\cdot)$ 由式 (3.2) 给出. 进一步, 有

$$P(t)\ge 0,\qquad \forall\, t\in[t_0,T]. \tag{3.13}$$

证明. 由于此时可证 $N\gg 0$, 故由定理 2.1, 问题 (LQ) 存在惟一的最优控制. 因此, 再由定理 3.2, Riccati 方程 (3.3) 存在解 $P(\cdot)$. 所以, 我们只需证明 (3.13). 不失一般性，我们只需证明 $t=t_0$ 时结论成立. 由定理 2.1(iv), 我们可知，此时相应于 $b(\cdot)=0$ 的问题 (LQ) 也是惟一可解的. 由微分方程解的惟一性，(3.4) 的解 $\varphi(\cdot)$ 必恒为 0. 于是，利用 (2.11) 和 (3.6) 可得：$\forall\, y_0\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}&\langle P(t_0)y_0,y_0\rangle=2J(\bar u(\cdot))\\=\;&\int_{t_0}^T\Big\{\Big\langle (Q-S^\top R^{-1}S)\bar y(t),\bar y(t)\Big\rangle\\&+\Big|R^{\frac12}\Big[\bar u(t)+R^{-1}S\bar y(t)\Big]\Big|^2\Big\}\mathrm{d}t+\langle G\bar y(T),\bar y(T)\rangle\ge 0.\end{aligned}$$

从而 $P(t_0)\ge 0$. □

上面的结果表明对于标准的 LQ 问题，Riccati 方程完全决定了 LQ 问题的解. 但是，请读者注意，解惟一的 LQ 问题并不一定是标准的. 事实上，利用定理 3.1, 我们很容易构造一个最优解惟一但不是标准的 LQ 问题. 例如在 $[0,T]$ 上任取一组 A,B,b,Q,S,R,G, 使得

$$R\gg 0,$$

而 (2.10)(对任何 $0<t_0<T$) 不成立 (比如可以取 $G<0$). 由于 (3.3) 是局部可解的，因而存在 $t_0\in[0,T)$ 使得 (3.3) 在 $[t_0,T]$ 上有

解. 于是由定理 3.1, 对于任何初值 $y_0 \in \mathbb{R}^n$, 相应的以 (t_0, y_0) 为初值的问题 (LQ) 是惟一可解的. 但是, 此时, 问题 (LQ) 不是标准的.

下面我们给出一个求解 LQ 问题的例子.

例 3.1. 设

$$\begin{cases} \dot{y} = y(t) + u(t), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}y^2(1).$$

试求 $J(u(\cdot))$ 的最小值.

解: 本题中, $A = 1, B = 1, b = 0, Q = 0, S = 0, R = 1, G = 1$. 于是这是一个标准的 LQ 问题, 有惟一的最优控制. 此时, Riccati 方程为

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + 2P(t) - P^2(t) = 0, \quad t \in [0,1], \\ P(1) = 1. \end{cases}$$

解得 $P(t) = \dfrac{2}{1 + \mathrm{e}^{2(t-1)}}$. 而由于 $b = 0$ 立即可得 $\varphi = 0$. 从而最优控制满足

$$\bar{u}(t) = -\frac{2}{1 + \mathrm{e}^{2(t-1)}}\bar{y}(t), \qquad t \in [0,1],$$

其中 $\bar{y}$ 是相应的最优状态. 进一步, 我们有

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \frac{1}{2}P(0)y^2(0) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-2}}.$$

§4. 无限时区的 LQ 问题

本节介绍无限时区的线性二次最优控制问题. 我们考虑系数矩阵为常值的情形. 考虑以下状态方程:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \qquad t \in [0, +\infty), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

性能指标为:

$$\begin{aligned} & J(u(\cdot)) = J(u(\cdot); y_0) \\ = \quad & \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \Big\{ \langle Qy(t), y(t)\rangle + 2\langle Sy(t), u(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle \Big\} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

其中 $Q \in \mathcal{S}^n$, $S \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $R \in \mathcal{S}^k$. 在考虑无限时区的二次最优控制问题时，与有限时区的情形不同，对于

$$u(\cdot) \in \mathscr{U} \triangleq L^2(0, +\infty; \mathbb{R}^k),$$

性能指标 $J(u(\cdot))$ 并不是自然有定义的. 这是两者之间的一个重要的区别. 如果 A 的所有特征值都具有负实部，那么容易证明对于任何 $u(\cdot) \in \mathscr{U}$, $J(u(\cdot))$ 是有意义的. 另一方面，也可以方便地举出例子表明当 A 具有实部非负的特征值时，使 $J(u(\cdot); y_0)$ 有意义的控制集 $\mathscr{U}_{ad} \subseteq \mathscr{U}$ 可能依赖于 y_0. 这在处理中是不方便的. 因而在本节，我们将假定 A 的所有特征值具有负实部[1]. 此时，最优控制问题是

问题 $(LQ)_\infty$. 寻找控制 $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}$, 使得

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}} J(u(\cdot)). \tag{4.2}$$

类似于有限时区情形，我们定义:

[1]如果存在矩阵 K 使得 $A - BK$ 的特征根都具有负实部，则我们可以令 $u(\cdot) = -Ky + v(\cdot)$，把问题化为这一情形.

定义 4.1. (i) 称问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 是**有限的**，如果 (4.2) 的右端是有限的.

(ii) 称问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 是 (**惟一**)**可解的**, 如果存在 (惟一的)$\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}$ 满足 (4.2).

由常数变易公式，对于 $u(\cdot) \in \mathscr{U}$, 方程 (4.1) 的解为

$$y(t) \equiv y(t; y_0, u(\cdot)) = \mathrm{e}^{tA} y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} B(s) u(s) \mathrm{d}s.$$

记 $\mathcal{Y} = L^2(0, +\infty; \mathbb{R}^n)$,

$$\begin{cases} (Lu(\cdot))(t) \triangleq \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} Bu(s) \mathrm{d}s, & \forall\ u(\cdot) \in \mathscr{U}; t \in [0, +\infty), \\ f(t) \triangleq \mathrm{e}^{tA} y_0, \quad \forall\ t \in [0, +\infty), \\ (L^* h(\cdot))(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} B^\top \mathrm{e}^{(s-t)A^\top} h(s) \mathrm{d}s, \quad \forall\ h(\cdot) \in \mathcal{Y}, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} J(u(\cdot)) = & \frac{1}{2}\Big\{\Big\langle (L^*QL + SL + L^*S^\top + R)u, u \Big\rangle_{\mathscr{U}} \\ & + 2\Big\langle (L^*Q + S)f, u \Big\rangle_{\mathscr{U}} + \Big\langle Qf, f \Big\rangle_{\mathcal{Y}} \Big\} \\ \equiv & \ \frac{1}{2}\Big\{\Big\langle Nu(\cdot), u(\cdot) \Big\rangle_{\mathscr{U}} + 2\Big\langle H(\cdot), u(\cdot) \Big\rangle_{\mathscr{U}} + F \Big\}, \end{aligned}$$

对应于定理 2.1, 2.2, 命题 2.3 和定理 2.4 我们有

定理 4.2. (i) 如果问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 是有限的，则

$$N \geq 0.$$

(ii) 问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 是 (惟一) 可解的当且仅当 $N \geq 0$，且存在 (惟一的) $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}$ 满足

$$N\bar{u}(\cdot) + H(\cdot) = 0.$$

此时，$\bar{u}(\cdot)$ 是最优控制.

(iii) 如果 $N \gg 0$, 即存在 $\delta > 0$ 使得

$$\Big\langle Nu(\cdot), u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}} \geq \delta\Big\langle u(\cdot), u(\cdot)\Big\rangle_{\mathscr{U}}, \qquad \forall\, u(\cdot) \in \mathscr{U},$$

则问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 的最优控制 $\bar{u}(\cdot)$ 由下式给出:

$$\bar{u}(\cdot) = -N^{-1}H(\cdot).$$

此时

$$\begin{aligned} V(y_0) &= \inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}} J(u(\cdot); y_0) \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\Big\langle (L^*Q+S)\mathrm{e}^{\cdot A}y_0, N^{-1}(L^*Q+S)\mathrm{e}^{\cdot A}y_0\Big\rangle_{\mathscr{U}} \\ &\equiv \frac{1}{2}\langle Py_0, y_0\rangle. \end{aligned}$$

这里 $P \in \mathcal{S}^n$.

定理 4.3. (i) 设问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 有一组最优对 $(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$, 则存在下述方程的解 $\bar{p}(\cdot)$:

$$\begin{cases} \dot{\bar{p}}(t) + A^\top \bar{p}(t) + Q\bar{y}(t) + S^\top \bar{u}(t) = 0, \\ \bar{p}(+\infty) = 0, \end{cases}$$

满足

$$R\bar{u}(t) + B^\top \bar{p}(t) + S\bar{y}(t) = 0, \qquad \text{a.e. } t \in [0, +\infty).$$

(ii) 设问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 有限，则

$$R \geq 0.$$

定理 4.4. (i) 设 $N \geq 0$, 且 $R > 0$, 则问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 是 (惟一) 可解的当且仅当下述两点边值问题有 (惟一) 解 $(\bar{y}(\cdot), \bar{p}(\cdot)) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$:

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}} = (A - BR^{-1}S)\bar{y} - BR^{-1}B^\top \bar{p} + b, \qquad 于\ [0, +\infty), \\ \dot{\bar{p}} = -(A - BR^{-1}S)^\top \bar{p} - (Q - S^\top R^{-1}S)\bar{y}, \quad 于\ [0, +\infty), \\ \bar{y}(0) = y_0, \qquad \bar{p}(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

此时,

$$\bar{u}(t) = -R^{-1}[B^\top \bar{p}(t) + S\bar{y}(t)], \qquad t \in [0, +\infty), \tag{4.4}$$

是一个最优控制, 其中 $\bar{y}(\cdot)$ 为相应的最优轨线.

(ii) 设 $N \gg 0$, 且 $R > 0$, 则 (4.3) 有惟一解, 而且问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 惟一可解, 而由式 (4.4) 给出的 $\bar{u}(\cdot)$ 是问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 的反馈最优控制.

注 4.1. 在定理 4.2 中, 如果问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 对任何初值 y_0 都是惟一可解的, 则利用该定理的 (i)—(ii), 仍然可以容易地证明存在对称阵 P 使得

$$V(y_0) = \inf_{u(\cdot) \in \mathscr{U}} J(u(\cdot); y_0) = \frac{1}{2}\langle P y_0, y_0 \rangle. \tag{4.5}$$

相应于定理 3.1 和 3.2 的结果在这里稍有不同, 我们此时导出**代数 Riccati 方程**.

定理 4.5. (i) 设 $R > 0$. 以下的代数 Riccati 方程

$$PA + A^\top P + Q - (B^\top P + S)^\top R^{-1}(B^\top P + S) = 0, \tag{4.6}$$

有对称解 $P \in \mathcal{S}^n$. 且 $A - BR^{-1}(B^\top P + S)$ 的特征根都具有负实部, 则问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 惟一可解, 并且具有最优反馈控制

$$\bar{u}(t) = -R^{-1}(B^\top P + S)\bar{y}(t), \qquad t \in [0, +\infty). \tag{4.7}$$

进一步，有

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \frac{1}{2}\langle Py_0, y_0\rangle. \tag{4.8}$$

(ii) 设 $R > 0$. 如果对任何 y_0, 问题 $(\mathrm{LQ})_\infty$ 有限，则代数 Riccati 方程 (4.6) 有对称解 P 使得 (4.5) 成立.

证明. (i) 这一部分的证明完全可以仿照定理 3.1 的证明，需要注意的是在现在这种情形下，$\varphi(\cdot)$ 不出现，而 $A-BR^{-1}(B^\top P+S)$ 的所有特征根都具有负实部是为了保证由 (4.7) 确定的状态 $\bar{y}(\cdot)$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty}\langle P\bar{y}(t), \bar{y}(t)\rangle \to 0$$

(ii) 由定理 4.2 和注 4.1, 此时 (4.5) 成立，于是利用下面的最优原理 — 命题 4.6 以及 $V(\cdot)$ 的光滑性，我们可以证明

$$\langle \nabla V(y), Ay\rangle + \mathcal{H}(y, \nabla V(y)) = 0,\ \forall\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{4.9}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(y,p) &= \inf_{u\in\mathbb{R}^m}\Big\{\langle p, Bu\rangle + \frac{1}{2}\big[\langle Qy, y\rangle + 2\langle Sy, u\rangle + \langle Ru, u\rangle\big]\Big\}\\ &= \frac{1}{2}\langle Qy, y\rangle - \frac{1}{2}\langle R^{-1}(B^\top p + Sy), B^\top p + Sy\rangle. \end{aligned}\tag{4.10}$$

由于 $\nabla V(y) = Py$, 将它和 (4.10) 代入 (4.9)，我们得到

$$\langle [PA + A^\top P + Q - (B^\top P + S)^\top R^{-1}(B^\top P + S)]y, y\rangle = 0,\quad \forall\ y \in \mathbb{R}^n.$$

由此即得 (4.6). □

命题 4.6. 设 A 的特征根均具有负实部，$N \gg 0$, $R > 0$, 则对任何 $t > 0$,

$$V(y_0) = \frac{1}{2}\inf_{u(\cdot)\in\mathscr{U}}\Big\{\int_0^t \big\{\langle Qy(s;y_0,u(\cdot)), y(s;y_0,u(\cdot))\rangle$$

$$+2\langle Sy(s;y_0,u(\cdot)),u(s)\rangle$$
$$+\langle Ru(s),u(s)\rangle\Big\}\,\mathrm{d}s+V(y(t;y_0,u(\cdot)))\Big\}.$$

例 4.1. 试讨论系统

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)+u(t), y(0)=y_0$$

在性能指标

$$J(u(\cdot))=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\{3y^2(t)+u^2(t)\}\mathrm{d}t$$

取最小值时的最优控制.

解： 我们有 $A=1,B=1,Q=3,R=1$. 此时，代数 Riccati 方程为

$$3+2P-P^2=0,$$

解得 $P=3$ 或 $P=-1$. 注意到上面两个值中，$P=3$ 满足 $A-BR^{-1}(BP+S)<0$，而 $P=-1$ 不满足. 因而舍去 $P=-1$. 根据定理 4.5, 有最优控制

$$\bar{u}(t)=-3\bar{y}(t),\qquad t\in[0,+\infty),$$

其中 $\bar{y}$ 是相应的最优状态. 进一步，我们有

$$J(\bar{u}(\cdot))=\frac{1}{2}Py^2(0)=\frac{3}{2}y_0^2.$$

注记

1. LQ 问题首先是 1958 年由 Bellman-Glicksberg-Gross 加以研究的 ([10] 第四章)，1960 年，Kalman 建立了 LQ 问题的状态反馈最优控制，并把 Riccati 方程引入了控制理论.

2. 1720 年，Riccati(1676—1754) 在给朋友的信中提出了如下的微分方程

$$\dot{y} = \alpha y^2 + \beta t^m$$

和

$$\dot{y} = \alpha y^2 + \beta t + \gamma t^2.$$

其后他对这类方程进行了长时间的研究．后人把这类方程称为 Riccati 方程．除了 Riccati，后来许多数学家包括 Euler 和 Liouville 都对 Riccati 方程进行了研究．这些研究的主要兴趣在于微分方程理论．在对经典变分问题的研究中，人们已经注意到了 Riccati 方程和变分问题解的存在性之间存在某种联系．而最优控制理论诞生的标志之一 — Kalman 最优线性反馈调节器理论的建立则使 Riccati 方程从此大放光彩．

3. 对于许多初学者来讲，如何证明 (得到) 定理 3.1 是有一定难度的．比如为何要计算 $\langle P(T)y(T), y(T)\rangle - \langle P(t_0)y_0, y_0\rangle$，这在定理的结果未知时是令人疑虑的．下面的陈述也许可以给对这一切感到不解的读者提供一种思路．由定理 2.4，在 Riccati 方程有解的情况下，最优控制应该具有形式 (3.2)．于是，通过观察性能指标，特别是性能指标中的

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\langle R(t)u(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t$$

项，我们可以设想性能指标经过配方应该含有项

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left|R^{-\frac{1}{2}}\left[Ru + (B^\top P + S)y + B^\top \varphi\right]\right|^2 \mathrm{d}t.$$

将上式展开，自然就可以看到定理 3.1 是如何得到的以及可以给出怎样的证明．

习题

1. 设 $R(\cdot) \in L^\infty(t_0, T; \mathbf{R}^{k\times k})$, $\Psi(\cdot,\cdot) \in L^\infty([t_0,T]\times[t_0,T]; \mathbf{R}^{k\times k})$, $\mathscr{U} = L^2(t_0, T; \mathbf{R}^k)$,

$$(Nu(\cdot))(t) = R(t)u(t) + \int_0^t \Psi(t,s)u(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall\, t \in [t_0, T]; u(\cdot) \in \mathscr{U}.$$

如果

$$\left\langle Nu(\cdot), u(\cdot) \right\rangle_{\mathscr{U}} \geq 0, \qquad \forall\, u(\cdot) \in \mathscr{U},$$

则

$$\langle R(t)u, u \rangle \geq 0, \quad \forall\, u \in \mathbf{R}^k, \qquad \text{a.e. } t \in [t_0, T].$$

特别，如果 $R(\cdot) \in L^{\infty}(\mathbf{R}; \mathcal{S}^k)$，且算子 N 为 $\mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{U})$ 中的自伴算子，则上述结果可表为

$$N \geq 0, \quad \text{in } \mathscr{U} \Longrightarrow R(\cdot) \geq 0, \quad \text{in } \mathscr{U}.$$

2. 举一个 (2.12) 成立但是 LQ 问题不是有限的例子.
3. 试利用最大值原理证明定理 2.4.
4. 试用动态规划方法讨论 LQ 问题.
5. 在定理 3.1 中, 用 (3.5) 代替 $R \gg 0$，试讨论方程 (3.3)—(3.4) 仍有解的情形. (i) 举例说明此时问题 (LQ) 可能无解. (ii) 给出这种情形下使问题 (LQ) 可解的条件.
6. 设 A, B, b, Q, R, G 如第一节所设.

$$S = 0, \quad Q(\cdot) \geq 0, \quad G \geq 0, \quad R(\cdot) \gg 0,$$

则相应的 LQ 问题是标准的. 此时 Riccati 方程有解. 考虑 $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $b(\cdot)$, $Q(\cdot)$, G 固定，$R(\cdot)$ 变化时的情形. 设相应的 Riccati 方程的解为 $P_R(\cdot)$, 证明存在与 R 无关的 $K \in \mathcal{S}^n$ 使得

$$P_R(t) \leq K, \qquad t \in [t_0, T].$$

7. 证明在定理 4.2 中，如果问题 $(LQ)_\infty$ 对任何初值 y_0 都是惟一可解的，则存在对称阵 P 使得 (4.5) 成立.
8. 设

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x(t) - u(t), \\ x(0) = 2, \end{cases}$$

$$J(u(\cdot)) = \int_0^1 \{-x^2(t) + u^2(t)\}\, \mathrm{d}t + 2x^2(1).$$

试求 $J(u(\cdot))$ 的最小值.

9. 试讨论系统

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + u(t), x(0) = x_0$$

在性能指标 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \{4x^2(t) + 2x(t)u(t) + u^2(t)\}\mathrm{d}t$ 取最小值时的最优控制.

参　考　文　献

[1] 钱学森. 工程控制论. 北京: 科学出版社. 1958

[2] 钱学森, 宋健. 工程控制论. 修订版. 北京: 科学出版社. 1980

[3] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗. 实变函数论与泛函分析概要. 上海: 上海科学技术出版社. 1963

[4] 雍炯敏. 对 Linderstrauss "A short proof of Liapounoff's convexity theorem" 一文的注记. 数学研究与评论, 1984(2): 4

[5] 雍炯敏. 动态规划方法与 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程. 上海: 上海科学技术出版社. 1991

[6] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义: 上册. 北京: 北京大学出版社. 1987

[7] 张恭庆, 郭懋正. 泛函分析讲义: 下册. 北京: 北京大学出版社. 1990

[8] 张学铭, 李训经, 陈祖浩. 最优控制系统的微分方程理论. 北京: 高等教育出版社. 1989

[9] Bellman R. Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press. 1957

[10] Bellman R, Glicksberg I, Gross O. Some Aspects of the Mathematical Theory of Control Processes. California: Rand Corporation. 1958

[11] Bellman R, Kalaba R. Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory. New York: Dover Publications. 1964

[12] Berkovitz L D. Optimal Control Theory. New York: Springer-Verlag. 1974. 中译本: 最优控制理论. 贺建勋, 连瑞兴, 黄伙泉, 等译. 上海: 上海科学技术出版社. 1985

[13] Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis. New York: Wiley. 1983

[14] Crandall M G, Lions PL. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Trans Amer Math Soc, 1983, 227: 1∼42

[15] Crandall M G, Evans L C, Lions P L. Some properties of Hamilton-Jacobi equations. Trans Amer Math Soc, 1984, 282: 487∼502.

[16] Crandall M G, Ishii H, Lions P L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull Amer Math Soc (NS), 1992, 27: 1∼67

[17] Evans L C. A convergence theorem for solutions of nonlinear second order elliptic equations. Indiana Univ Math J, 1978, 27: 875∼887

[18] Evans L C. On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods. Isreal J Math, 1980, 36: 225∼247

[19] Evans L C. Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations. Comm Pure Appl Math, 1982, 35: 333∼363

[20] Fattorini H O. Relaxed Controls in Infinite Dimensional Systems. In: International Series of Numerical Mathematics, 1991, 100: 115∼128. Boston: Birkhäuser

[21] Fattorini H O. Infinite Dimensional Optimization and Control Theory. Cambridge University Press. 1999

[22] Fleming W H. Future Directions in Control Theory—A Mathematical Perspective. Philadelphia: SIAM. 1988.

[23] Gamkrelidze R V. On sliding optimal states. Dokl Akad Nauk SSSR, 1962, 143: 1243∼1245 = Soviet Math Dokl, 1962, 3: 559∼561

[24] Gamkrelidze R V. Principle of Optimal Control Theory. New York: Plenum Press. 1978. 中译本: 最优控制理论基础. 姚允龙译. 上海: 复旦大学出版社. 1988

[25] Giaquinta M, Hildebrandt S. Calculus of Variations, I, II. Berlin: Springer-Verlag. 1996

[26] Goldstine H H. A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century. New York: Springer-Verlag. 1980

[27] Hermes H, LaSalle J P. Functional Analysis and Time Optimal Control. New York: Academic Press. 1969

[28] Ishii H. Uniqueness of unbounded viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations. Indiana Univ Math J, 1984, 33: 721∼748

[29] Kalman R E. Contributions to the theory of optimal control. Bol Soc Mat Mexicana, 1960, 5: 102∼119

[30] Li X, Yong J. Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems. Boston: Birkhäuser. 1995

[31] Lions J L. Optimal Control of Systems Governed by Differential Equations. New York: Springer Verlag. 1971

[32] Lou H. Viscosity Solutions Defined by Right Differentials. Journal of Systems Science and Complexity, 2002, 15: 146∼154

[33] Lou H. On Attainable Sets of Control Systems with p-Integrable Controls. J Optim Theory Appl 2004, 123(1): 123∼147

[34] Neustadt L W. The existence of optimal controls in the absence of convexity conditions. J Math Anal Appl, 1963, 7: 110∼117

[35] McShane E J. Generalized curves. Duke Math J, 1940, 6: 513∼536

[36] McShane E J. Necessary conditions for generalized–curve problems of the calculus of variation. Duke Math J, 1940, 7: 1∼27.

[37] McShane E J. Existence theorem for Bolza problems of the calculus of variations. Duke Math J, 1940, 7: 28∼61.

[38] McShane E J. Relaxed controls and variational problems. SIAM J. Control, 1967, 5: 438∼485

[39] McShane E J. The calculus of variations from the beginning through optimal control theory. In: Optimal Control and Differential Equations, A B Schwazkopf, et al. ed. New York: Academic Press. 1978. 3∼51. also SIAM J Control Optim, 1989, 27: 916∼939

[40] Rockafellar R T. Convex Analysis. Princeton: Princeton University Press. 1970

[41] Pesch H J, Bulirsch R. The maximum principle, Bellman's equation, and Carathéodory work. J Optim Theory Appl, 1994, 80: 199∼225

[42] Pontryagin L S. The mathematical theory of optimal control processes and differential games. Proc Steklov Inst Math, 1986, 4: 123∼159

[43] Pontryagin L S, Boltyanski V G, Gamkrelidze R V, et el. Mathematical Theory of Optimal Processes. New York: Wiley. 1962. 中译本：最佳过程的数学理论. 陈祖浩等译. 上海: 上海科学技术出版社. 1965

[44] Stampacchia G. Hilbert's twenty-third problem extension of the calculus of variations, Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems. AMS, Providence, RI, 1976. 611∼628

[45] Warga J. Relaxed variational problems. J Math Anal Appl, 1962, 4: 111∼128

[46] Warga J. Necessary conditions for minimum in relaxed variational problem. J Math Anal Appl, 1962, 4: 129∼145

[47] Warga J. Functions of relaxed controls. SIAM J Control, 1967, 5: 628∼641

[48] Warga J. Control problems with functional restrictions. SIAM J Control, 1970, 8: 360∼371

[49] Warga J. Unilateral and minimax control problems defined by integral equationss. SIAM J Control, 1970, 8 : 372∼382

[50] Warga J. Optimal Control of Differential and Functional Equations. New York: Academic Press. 1972

[51] Yong J, Zhou X Y. Stochastic Controls: Hamiltonian System and HJB Equations. Springer-Verlag. 1999

[52] Yosida K. Functional Analysis. 6th ed. Berlin: Springer-Verlag. 1980

[53] Young L C. On approximation by polygon's in the calculus of variations. Proceeding of the Royal Society, (A), 1933, 14: 325∼341

[54] Young L C. Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations. C. R. Sci. Lettres Varsovie, C. III, 1937, 30: 212∼234

[55] Young L C. Necessary conditions in the calculus of variations. Acta Mathematica, 1938, 69: 239∼258

[56] Young L C. Lectures on the Calculus of Variational and Optimal Control Theory. Philadelphia: Saunders. 1969

索 引